Espaces de Sobolev

Ω désignera encore un ouvert de $\mathbb{R}^d$

I/ Définitions

Soit $p \in [1, +\infty]$

On a déjà vu $W^{1,p}_{loc}(\Omega) = \{ f \in L^p_{loc}(\Omega)$ tq $\forall i = 1, \dots, d$ $\partial_i f$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$ est en fait ds $L^p_{loc}(\Omega) \}$

$\subset W^{1,1}_{loc}(\Omega)$

Pour $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ on peut parler presque partout du gradient de f, $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \in L^p_{loc}(\Omega)^d$

qui vérifie $\int f \nabla \phi = - \int \nabla f \, \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

De même, on définit $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) ; \ \forall i = 1, \dots, d \ \partial_i f \text{ au sens } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ est une fonction } \in L^p(\Omega) \}$$

Pour $f \in W^{1,p}(\Omega)$ on pose

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left[\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_i f\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p}$$

C'est une <u>norme</u> sur $W^{1,p}(\Omega)$ (OK ?)

Autres choix possible :

$$\|f\|_{1,p} = \left(\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \| |\nabla f| \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

ou $$|||f|||_{1,p} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \| |\nabla f| \|_{L^p(\Omega)}$$

Toutes ces normes sont équivalentes car les normes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ sont équivalentes (OK ?)

Dans tous les cas, on a :

Si $(f_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$

Alors $f_n \longrightarrow f \in W^{1,p}(\Omega) \iff \begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ ds } L^p(\Omega) \\ \partial_i f_n \longrightarrow \partial_i f \text{ ds } L^p(\Omega) \end{cases}$ $\forall i = 1, \dots, d$

Rappelons que pour une suite (u_n) de $L^p(\Omega)$ et $u \in L^p(\Omega)$ on a :

$$\boxed{u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \Longrightarrow u_n \longrightarrow u \text{ ds } L^p(\Omega) \Longrightarrow u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$

En particulier on a

<u>Fait</u> : Soit (f_n) une suite de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ ds } L^p(\Omega) \\ \partial_i f_n \longrightarrow g_i \text{ ds } L^p(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, d \end{cases}$$

Alors $g_i = \partial_i f$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$ et

$f_n \longrightarrow f$ ds $W^{1,p}(\Omega)$

En effet, si $f_n \longrightarrow f$ ds $L^p(\Omega)$ on a $f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

et donc $\partial_i f_n \longrightarrow \partial_i f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

or $\partial_i f_n \longrightarrow g_i$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $\partial_i f = g_i$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$

et donc $\partial_i f = g_i$ μ-pp. $\in L^1_{loc}(\Omega)$

On peut définir de même les espaces de Sobolev d'indices supérieurs $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \text{ tq } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ avec } |\alpha| \leq m \text{ on a } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \right\}$$

dérivée ds $\mathcal{D}'(\Omega)$

On muni cet espace de la norme

$$\|f\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} := \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j f\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j_1=1}^{d}\sum_{j_2=1}^{d} \|\partial^2_{j_1 j_2} f\|^p_{L^p(\Omega)} + \dots + \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_m=1}^{d} \|\partial^m_{j_1 \cdots j_m} f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

... ou de tout autre norme équivalente (par équiv ds normes dans $\mathbb{R}^?$)

On a de même : $f_n \longrightarrow f$ ds $W^{m,p}(\Omega)$ si toutes les dérivée d'ordre $\leq m$ (à commencer par l'ordre 0) convergent dans $L^p(\Omega)$

<u>Théorème</u> Pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Il est réflexif si $1 < p < +\infty$, séparable si $p < +\infty$. C'est un <u>Hilbert</u> séparable pour $p = 2$

$$\hookrightarrow \langle f, g \rangle = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq m}} \int_\Omega \partial^\alpha f \, \overline{\partial^\alpha g}$$

<u>Démo</u> je prends le cas $m=1$

Montrons d'abord le caractère complet. Si (f_n) est une suite de Cauchy de $W^{1,p}$ alors (f_n) et les $(\partial_i f_n)$ sont des suites de Cauchy de L^p. Par conséquent, il existe $f \in L^p$ et $g_i \in L^p$ tq

$$f_n \longrightarrow f \text{ ds } L^p$$
$$\partial_i f \longrightarrow g_i \text{ ds } L^p \quad \text{pour } i = 1, \dots, d$$

Par le <u>fait</u> ci-dessus, on en tire que $f_n \longrightarrow f$ ds $W^{1,p}$

Ainsi, $W^{1,p}$ est bien complet.

Caractère réflexif : Considérons $E = L^p(\Omega)^{d+1}$ muni de la norme $\|g\|^p := \sum \|g_i\|^p$

et
$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow E$$
$$f \longrightarrow (f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

Alors T est une isométrie de $W^{1,p}$ dans E

$\Rightarrow$ $T(W^{1,p})$ sous-espace fermé de E

$\cong W^{1,p}$

Or E est réflexif pour $1 < p < +\infty$, et tout sous-espace fermé l'est aussi. (On peut aussi invoquer l'unif. convexité)

De même E est séparable pour $p < +\infty$, et tout sous-espace fermé l'est aussi.

$\boxtimes$

On utilisera parfois le théorème de densité suivant. Avant :

<u>Notation</u> On dit qu'un ouvert U de Ω est relativement compact dans Ω, et on écrit $U \Subset \Omega$

<u>si</u> $\overline{U}$ compact et $\overline{U} \subset \Omega$

<u>càd</u> $\exists K$ compact tq $U \subset K \subset \Omega$

Théorème (Friedrichs)

Soit $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$

Alors il existe une suite $(f_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

(1) $f_n|_\Omega \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$

et

(2) Pour $i = 1, \dots, d$,

$$\partial_i f_n|_U \longrightarrow \partial_i f|_U \quad \text{dans } L^p(U)$$

pour tout $U \Subset \Omega$

Rq : En général, il est difficile de prolonger/restreindre lorsqu'on travaille avec des dérivées (par ex dans $W^{1,p}$). En effet, si f est définie sur Ω et qu'on la prolonge, alors "les jeux sont faits" : on ne peut pas "prolonger la dérivée", qui est ce qu'elle est (et n'est pas de qu'elle n'est pas...)

Par exemple

$$1_{]0,1[} \in W^{1,p}(]0,1[) \text{ mais } \notin W^{1,p}(\mathbb{R})$$

Néanmoins :

Fait : Notons $P_0[g]$ le prolongement par 0 à $\mathbb{R}^d$ d'une fct g sur Ω.

Si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, alors $\alpha P_0[f] \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ et sa dérivée $\mathcal{D}'$, qui est dans L^p, vérifie :

$$\nabla(\alpha P_0[f]) = P_0[f] \nabla\alpha + \alpha P_0[\nabla f]$$

Démo du Fait

on sait que ~~dans~~ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$D(\alpha P_0[f]) = P_0[f]\, D\alpha + \alpha \underbrace{D P_0[f]}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)}$$

mais pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha D P_0[f], \phi \rangle &= \langle D P_0[f], \alpha \phi \rangle \\
&= - \langle P_0[f], D(\alpha\phi) \rangle \\
&= - \int P_0[f]\, D(\underbrace{\alpha\phi}_{\in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}) \\
&= - \int f\, D(\underbrace{\alpha\phi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)}) \\
&= \int (\alpha\phi)\, Df \qquad \wr\ \alpha Df = \alpha P_0 Df \\
&= \int \phi\, (\alpha\, P_0[Df])
\end{aligned}$$

et ceci $\forall \phi$

Donc $\alpha D P_0[f] = \alpha \underbrace{P_0[Df]}_{\in L^p(\mathbb{R}^d)}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ∎

Démo du théorème de Friedrichs

On va commencer par approximer par une suite dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit (j_k) une approx de l'identité avec $\mathrm{supp}(j_k) \subset B(\frac{1}{k})$

Soit $f_k = j_k * \underbrace{P_0[f]}_{\in L^p(\mathbb{R}^d)}$ P_0 prolongement f par 0 à $\mathbb{R}^d$

On sait que $f_k \longrightarrow P_0[f]$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ donc dans $L^p(\Omega)$

et sur Ω $P_0[f] \equiv f$. Ok pour 1).

Pour les dérivés. On fixe $U \subset\subset \Omega$

Soit $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ tq $d(U, \partial\Omega) > 0$

$\alpha \equiv 1$ sur un voisinage de U.

On remarque que sur U :

$$f_k = j_k * P_0[f] = j_k * (\alpha P_0[f]) \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

en effet, il suffit que $U + B(\frac{1}{k}) = \{ d(\cdot, U) \leq \frac{1}{k} \}$

$$\subset \{\alpha = 1\}$$

De plus, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$\nabla f_k = \nabla\left(j_k * (\alpha P_0[f]) \right) = j_k * \underbrace{\nabla(\alpha P_0[f])}_{\in L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{Par le Fait}$$

et donc

$$\nabla f_k \longrightarrow \nabla(\alpha P_0[f])$$

dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et donc aussi dans $L^p(U)$

Or, par le Fait, on a $\nabla(\alpha P_0[f]) = \alpha P_0[\nabla f] + P_0[f] \nabla\alpha$

~~mais sur ϕ~~ C'est une égalité entre fonctions $\in L^p(\mathbb{R}^d)$

et si on regarde la restriction à U on a

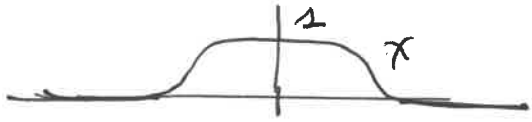
$$\nabla(\alpha P_0[f]) = \nabla f \quad \text{sur } U$$

Ainsi

$$\nabla f_k \longrightarrow \nabla f \text{ dans } L^p(U)$$

Pour avoir une suite dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on bouche.

Soit χ une fonction sur $\mathbb{R}^d$ qui vaut 1 au voisinage de 0, qui est C^∞, $\in [0,1]$ et à support compact.



Soit $\chi_k(x) = \chi(x/k)$ et $\tilde{f}_k(x) = \chi_k(x) f_k(x)$

↳ Notez que $\|\nabla \chi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{c}{k}$.

On a :

$$\tilde{f}_k - f = \chi_k (f_k - f) + (\chi_k - 1) f$$

Donc

$$\|\tilde{f}_k - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \underbrace{\|f_k - f\|_{L^p}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\int (1-\chi_k)^p |f|^p\right)^{1/p}}_{\to 0 \text{ par convergence dominée}}$$

Pour le gradient, on a

$$\nabla \tilde{f}_k = f_k \nabla \chi_k + \chi_k \nabla f_k$$

Donc

$$\|\nabla \tilde{f}_k - \nabla f\|_{L^p(U)} \leq \|f_k \nabla \chi_k\|_{L^p(U)} + \|\chi_k \nabla f_k - \nabla f\|_{L^p(U)}$$

$\|\nabla \chi_k\|_\infty \leq \frac{c}{k} \Rightarrow$

$$\leq \underbrace{\frac{c}{k} \|\nabla f_k\|_{L^p(U)} + \|\nabla f_k - \nabla f\|_{L^p(U)}}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0}$$

|| pour k assez grand

∎

II/ Opérations sur les dérivées

Theo : Soit $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^N$. Si $\lambda(\Omega) = +\infty$, on suppose aussi que $G(0) = 0$.

Si $u_1, \dots, u_N \in W^{1,p}(\Omega)$ alors la

la fonction $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par

$$K(x) = G(u_1(x), \dots, u_N(x))$$

appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ avec

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N} \partial_k G(u_1, \dots, u_N) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

<u>Démonstration</u> : voir [Lieb et Loss p 150]

<u>Applications</u>

- La première application est le cas de la composition <u>$N=1$</u>

  <u>ie</u> G une fct C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $|G'| \leq M$ sur $\mathbb{R}$, et $G(0)=0$ si Ω est de mesure infinie.

  Alors pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $G(u) \in W^{1,p}(\Omega)$

  avec $\frac{\partial}{\partial x_i} G \circ u = G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$

- La deuxième application est au produit

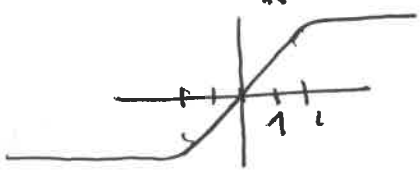
<u>Prop</u> : Soit $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v$$

<u>Démo</u> : OPS $|u|, |v| \leq 1$ presque partout

Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct C^1, à dérivée bornée et qui vaut $Id_{\mathbb{R}}$ sur $[-2, 2]$



par ex $\begin{cases} H(t) = t \text{ sur } [-2, 2] \\ H' \equiv 0 \text{ en dehors de } [-3,3] \end{cases}$

On pose $G(s,t) = H(s)\,H(t)$

$G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
vérifie les hypothèses
avec $N = 2$.

Donc $K = G(u,v) \in W^{1,p}$

<u>Mais</u> puisque tout $x \in \Omega$ on a

$$K(x) = G(u(x), v(x)) = u(x)\,v(x)$$
$$= H(u(x))\,H(v(x))$$

Donc $uv \in W^{1,p}$

et de plus

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = H'(u(x))\,H(v(x))\frac{\partial u}{\partial x_i} + H'(v)\,H(u)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$H' \equiv 1 \text{ sur }]-1,1[\qquad = v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$\blacksquare$

- Enfin on peut aussi en déduire le résultat suivant

<u>Theo</u> : si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ est à valeurs réelles, alors $|f| \in W^{1,p}(\Omega)$ et,

$$\nabla|f|(x) = \begin{cases} \nabla f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -\nabla f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que si $f, g \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ appartiennent aussi à $W^{1,p}(\Omega)$

<u>Rq</u> : 1) Le résultat reste vrai si f est à valeurs complexe mais la formule du gradient de $|f|$ est + compliquée

2) Il faut comprendre les égalités presque-partout

<u>i.e.</u> $\nabla|f| = \nabla f$ presque-partout sur $\{f > 0\}$.

<u>Démonstration</u> : voir [Lieb-Loss p 152 et 153] ou [TD]

III/ Densité de fonctions C^∞

Le théorème de Friedrichs donne déjà un résultat de densité partiel mais souvent suffisant.
Le résultat suivant est plus délicat.

<u>Théorème</u> (Meyers-Serrin)

Soit $p \in]1,+\infty[$. On a $\overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)} = W^{1,p}(\Omega)$

<u>càd</u> : si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $\exists (f_n)_{n\geq 1} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\|f - f_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On a aussi, dans le cas particulier $\Omega = \mathbb{R}^d$, un résultat plus fort

<u>Théorème</u>

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

<u>Rq</u> : Dans certains livres, on définit $H^1(\Omega)$ = l'adhérence des fcts C^∞ pour la norme $\|f\|^2 = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \||\nabla f|\|^2_{L^2(\Omega)}$

On voit donc que $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

On va faire la démonstration du théorème ci-dessus dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Démonstration

C'est encore la même chose. On prend (j_k) une approximation de l'identité dans $\mathbb{R}^d$.

Pour $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, on pose $f_k = j_k * f$

On sait que $f_k \longrightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Par ailleurs, $Df_k = j_k * \underbrace{Df}_{\in L^p(\mathbb{R}^d)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Donc $Df_k = j_k * Df \longrightarrow Df$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Donc on a bien $f_k \longrightarrow f$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Pour l'instant f_k est seulement $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour avoir un support compact, on tronque comme précédemment, i.e

$$\tilde{f}_k = \chi_k f_k \quad \text{avec} \quad \chi_k(x) = \chi(x/k)$$

$$\begin{cases} \chi \ C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \ \chi \in [0,1] \\ \chi \equiv 1 \text{ au } V(0). \end{cases}$$

Remarque : On peut aussi tronquer d'abord et régulariser ensuite. ∎

Plus précisément, on voit que pour $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,

$$\chi_k f \longrightarrow f \text{ dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

Ainsi, on voit que les fcts à support compacts $\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ sont ~~dessous~~ denses dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant, si $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ est à support compact, la suite $j_k * g$ est ds $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et elle converge vers g dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

IV/ Opérateur de prolongement

Def. On dit que l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ admet un $W^{1,p}$-opérateur de prolongement s'il existe

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

linéaire et $c = c(\Omega, p)$ tel que, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

(i) $Pu_{|\Omega} = u$ (pp sur Ω)

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

- Le problème du prolongement est difficile. (Repenser à $1_{]0,1[} \in W^{1,1}(]0,1[)$ que l'on veut prolonger à $\mathbb{R}$)
- L'opérateur de prolongement permet d'étendre à Ω des résultats vrais sur $\mathbb{R}^d$.

Voici un exemple qui n'utilise que l'existence "d'une" extension (i.e le (i) seulement)

Prop : Si Ω admet un $W^{1,p}$-opérateur de prolongement, alors $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)_{|\Omega}$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$

Demo : On prend la suite habituelle sur $\mathbb{R}^d$, après extension et on restreint à Ω, i.e. pour $f \in W^{1,p}(\Omega)$, on prend

$$f_n = \chi_n (\rho_n * Pf)$$

On a $P\nabla f = \nabla Pf$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $f_n \longrightarrow Pf$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Donc $f_n \longrightarrow f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

$\blacksquare$

Il n'est pas toujours possible de construire une $W^{1,p}$-extension pour Ω.

<u>Ex</u> : $\Omega =]-1,0[\cup]0,1[$

Pas de $W^{1,1}$-extension

En effet, prenons $f =$  et

supposons qu'$\exists\, F \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ avec $F_{|\Omega} = f$

Alors F devrait être continue (injection de Sobolev) ce qui est exclu (f ne coïncide pas pp sur Ω avec une fct continue sur $\mathbb{R}$... pourquoi ?)

Voici néanmoins une condition suffisante

<u>Théorème</u> Supposons que Ω ait un bord C^1 borné ou bien que $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times [0,+\infty[$ (demi-espace)

Alors Ω admet un $W^{1,p}$-opérateur de prolongement

<u>Démo</u> : voir [Brézis, p. 158]

V/ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

<u>Def</u> : Soit $p \in [1,+\infty[$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

C'est donc un sous-espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$.

On montre que $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ est un Banach, séparable, réflexif si $1<p<+\infty$.

C'est un Hilbert dans le cas $p=2$, noté $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

Notez que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, mais on peut avoir $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$ pour des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

L'idée est que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui sont "nulles sur le bord $\partial\Omega$ de Ω".
Comme une fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$ est définie seulement presque-partout, on ne peut pas parler en général de sa restriction à $\partial\Omega$ (c'est cependant parfois possible $\longrightarrow$ voir théorie des traces).
Voici quelques résultats qui permettent de préciser cette idée.

<u>Prop</u> : Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\mathrm{supp}(u)$ soit compact et inclus dans Ω. Alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

<u>Demo</u> Soit U un ouvert tel que

$$\mathrm{supp}(u) \subset U \Subset \Omega.$$

(par ex $U = \{ d(\cdot, \mathrm{supp}(u)) < \delta \}$ pour $\delta > 0$ assez petit.)

Soit $\alpha \in C_c^\infty(U)$ avec $\alpha \equiv 1$ sur $\mathrm{supp}(u)$ (Urysohn)

Par le théo. de Friedrichs, il existe $(u_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq $u_n \longrightarrow u$ ds $L^p(\Omega)$
$\nabla u_n|_U \longrightarrow \nabla u|_U$ ds $L^p(U)$

Alors $\alpha u_n \longrightarrow \alpha u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et $\alpha u_n \in C_c^\infty(\Omega)$. Donc $\underset{u}{\underset{\shortparallel}{\alpha u}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition On suppose $\partial\Omega$ de classe C^1. Soit
$$f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$
Alors
$$f \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff f \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Rq : On verra que si $p > d$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

Démonstration : voir [Brézis, p 179] ∎

Voici une dernière caractérisation

Proposition On suppose $\partial\Omega$ de classe C^1. Soit $1 \leq p < +\infty$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. Alors
$$f \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prolongement par } 0}}{P_0[f]} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$
et dans ce cas $\nabla P_0[f] = P_0[\nabla f]$.

Démonstration : voir [Brézis, p 173]. ∎