Inégalités et injections de Sobolev

Imposer une intégrabilité du gradient entraine des propriétés d'intégrabilité, voire de régularité, sur la fonction.

Vocabulaire des injections : X s'injecte dans Y si $X \subset Y$ et l'injection est simplement l'identité sur X

$$\mathrm{Id} : X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow x$$

On travaille dans la catégorie des espaces vectoriels normés (et m̂ des Banach), ie on a $(X, \underbrace{\|\cdot\|_X}_{\text{norme sur } X})$ et $(Y, \underbrace{\|\cdot\|_Y}_{\text{norme sur } X})$

Dans ce cas, lorsqu'on écrit $X \subset Y$ (X s'injecte dans Y) on sous-entend que cette injection est continue, c'est à dire : $\underline{\exists C>0 \text{ tq } \forall x \in X : \|x\|_Y \leq C \|x\|_X}$

(Attention, cela ne veut pas dire que $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ sont équivalentes sur X : on a seulement une direction).

Donc dire $X \subset Y$ (injection continue) c'est dire 2 choses à la fois : une inclusion ensembliste, et la continuité (ie. une inégalité entre les normes $\|\cdot\|_Y$ et $\|\cdot\|_X$ sur X)

Exemple : Si μ mesure finie sur X, alors
$$L^p(X,\mu) \subset L^q(X,\mu) \quad \text{dès que } p \geq q.$$
(C'est Hölder).

Plus loin, on imposera des propriétés supplémentaires à l'injection, comme la compacité.

I/ Inégalités d'injections sur $\mathbb{R}^d$

Théo A (Inégalité de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$)

Soit $p \in [1, d[$ et $p^* = \frac{pd}{d-p}$, ie $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$.

Alors $$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$$

et il existe une constante $C = C(p,d)$ tel que $\forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C \, \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Remarque : Notez que $p^* > p$. La valeur de p^* est en fait imposé par homogénéité. En effet, supposons que l'on ait une inégalité du type

$$\|f\|_{L^q} \leq C \, \|Df\|_{L^p}$$

Considérons, pour f fixé, $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$

on a : $$\|f_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{-d/q} \, \|f\|_{L^q}$$
$$\|Df_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{1-d/p} \, \|Df\|_{L^p}$$

on doit donc avoir (en prenant f tq $\|Df\|_{L^p} > 0$ et $\|f\|_{L^q} > 0$)

$$\forall \lambda > 0 \qquad \lambda^{\frac{d}{p} - \frac{d}{q} - 1} \underbrace{\frac{\|f\|_{L^q}}{\|Df\|_{L^p}}}_{\text{constante}} = \frac{\|Df_\lambda\|_{L^q}}{\|f_\lambda\|_{L^p}} \leq C$$

Comme on peut faire $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to +\infty$, il faut nécessairement que la puissance soit nulle, i.e.

$$\frac{d}{p} - \frac{d}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{q = p^*}}$$

Remarque : Notez que l'inégalité $\|f\|_{L^{p^*}} \leq \underline{\underline{C \, \|Df\|_{L^p}}}$ donne une information a priori plus forte que $W^{1,p} \subset L^{p^*}$.

Démo du théo A : voir [Brézis, p163]

Cor B Soit $p \in [1, d[$. Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d) \quad , \forall q \in [p, p^*]$$

(avec injection continue)

Demo Pour $q \in [p, p^*]$ il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{p^*}$$

On a alors, pour $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_{L^q} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^p}^{1-\alpha} \|f\|_{L^{p^*}}^{\alpha} \underset{\text{ineq. A-G}}{\leq} (1-\alpha)\|f\|_{L^p} + \alpha \|f\|_{L^{p^*}}$$

$$\underset{\text{car } \alpha \in [0,1]}{\leq} \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^{p^*}} \underset{\text{Sobolev}}{\leq} C \|f\|_{W^{1,p}}$$

∎

Cor C (Cas limite $p = d$)

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d) \quad \forall q \in [d, +\infty[$$

avec injection continue

Démo Voir [Brézis, p165].

Jusqu'à présent, nous avons étudié les cas

$$p \in [1, d]$$

Nous allons voir maintenant le cas $p > d$.

Remarque : le cas $d = 1$ est particulier, puisque le théo. fondamental du calcul des distrib nous permet d'écrire que pour presque tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{[x,y]} |f'| \leq \|f\|_{W^{1,1}} \quad \text{donc} \quad \underline{W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Théo D (Morrey)

Soit $p > d$. Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

avec injection continue. De plus, il existe $C > 0$ ($= c(p,d)$) tel que pour tout $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^\alpha \quad \text{p.p. } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

avec $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$.

Ainsi, les fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ "sont" bornées et continues (et m̂ hölderienne d'ordre α).
↳ UNIFORMEMENT

- "sont" doit se comprendre par "coïncide presque-partout avec"
  i.e. il existe un représentant continue (α-hölderien) borné.
- On a donc $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty$.

Démonstration voir [Brézis, p.166] ∎

Remarque : On déduit de $W^{1,p} \subset L^\infty$ que pour $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$

En effet, $\exists (f_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Donc $f_n \to f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$

i.e. converge uniformément (presque-partout)

$\Rightarrow \lim_{+\infty} f = 0$. (Permutation de limite).

Remarque : les fcts $H^1 = W^{1,2}$ de $\mathbb{R}$ sont continues bornées.
On déduit du résultat précédent pour $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ des injections pour les $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

théo E Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty[$

- Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$
- Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ $\forall q \in [p, +\infty[$
- Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$

avec injection continue.

De plus, dans le cas $p > \frac{d}{m}$, on a aussi en posant

$$k = \lfloor m - \frac{d}{p} \rfloor \quad \text{et} \quad \theta = m - \frac{d}{p} - k \quad (\theta \in]0, 1])$$

que $\forall f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\| \partial^\alpha f \|_{L^\infty} \leq C \| f \|_{W^{m,p}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ avec } |\alpha| \leq k$$

et

$$| \partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y) | \leq C \| f \|_{W^{m,p}} \, |x - y|^\theta$$

pp $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = k$

Rq : en particulier, si $p > \frac{d}{m}$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$ et toutes les dérivées $\leq k$ sont bornées.
et m̃ $C^{k,\theta}(\mathbb{R}^d)$

Demo : Par application répétée du résultat pour $W^{1,p}$

$$f \in W^{m,p} \Rightarrow \partial_i f \in W^{m-1,p}$$

∎

Rq : le cas $p = 1$ $m = d$ est encore particulier.
Comme précédemment, on voit que $W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Rq : Notez que les fonctions $W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ sont continues.

II/ Injections de Sobolev sur un domaine

Théorème F Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ admettant un $W^{1,p}$-prolongement.
Soit $p \in [1, +\infty[$.

(i) Si $1 \leq p < d$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$

(ii) Si $p = d$ $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty[$

(iii) Si $p > d$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

avec injection continue. De plus, si $p > d$, il existe $C = C(\Omega, p, d)$ tel que $\forall f \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x-y|^\alpha \quad \text{pp } x, y \in \Omega.$$

où $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$. (En particulier f est continue bornée sur Ω)

Démonstration On introduit l'opérateur

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

et on applique les Theo. A, Cor C, theo D. ∎

Remarque le résultat du théo F est vrai pour un Ω quelconque à condition de remplacer (partout) $W^{1,p}$ par $W_0^{1,p}$

En effet, dans ce cas on peut utiliser le prolongement trivial par zéro. On applique donc les résultats à $P_0[f] \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque (Traces).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si f est une fonction uniformément continue et bornée sur Ω, alors f admet

un (unique) prolongement en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$

Ainsi, si on peut appliquer le théo. F, toute fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > d$ admet un prolongement en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. En particulier, on peut alors parler de $f_{|\partial\Omega}$, la restriction de la fonction continue f à l'ensemble $\partial\Omega$.

<u>Rq</u> : On a des résultats analogues (théo. E) pour $W^{m,p}(\Omega)$ dès que Ω admet un $W^{m,p}$-prolongement à $\mathbb{R}^d$.
Dans ce cas, si $m - \frac{d}{p} > 0$ n'est pas entier et $k \in \lfloor m - \frac{d}{p} \rfloor$ on a que $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$.

III/ Injections compactes

Revenons à notre injection <u>continue</u> entre evn

$$(X, \|\cdot\|_X) \hookrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$$

$$\text{avec} \quad \forall x \in X : \quad \|x\|_Y \leq C \|x\|_X$$

On dit que cette injection est de plus <u>compacte</u> si l'application linéaire continue $id : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ est compacte.
Cela veut dire que la boule unité de X, B_X est relativement compacte dans Y, soit encore :

> L'injection $X \hookrightarrow Y$ est compacte si toute suite $(f_n) \subset X$ bornée dans $(X, \|\cdot\|_X)$ admet une sous-suite convergente dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$
> ie : si $(f_n) \subset X$ tq $\|f_n\|_X \leq C \ \forall n \geq 1$, alors $\exists f \in Y$ tq $\|f_{n_k} - f\|_Y \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$
> $\exists$ sous-suite (f_{n_k})

Il découle du théorème de Banach-Steinhaus que

Si l'injection $(X, \|\cdot\|_X) \hookrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ est compacte alors toute suite (f_n) qui converge faiblement dans X converge fortement dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$

Rq : Si $(f_n) \subset X$ et $f \in X$ tq $f_n \longrightarrow f$ (ie $\forall \ell \in X^*$ $\ell(f_n) \to \ell(f)$)

alors $\|f_n - f\|_Y \longrightarrow 0$

On peut se demander si les injections de Sobolev qu'on a vues sont compactes.

En général ce n'est pas le cas si Ω n'est pas borné (mais qui part à l'infini). Construire un contrex. pour l'injection $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$

Par contre, si Ω est borné et assez régulier, c'est le cas.

(RELLICH - KONDRACHOV)

Theo Soit Ω un ouvert borné admettant un $W^{1,p}$-prolongement (par ex $\partial\Omega$ C^1). On a :

(i) Si $p < d$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \leq p^* := \frac{np}{n-p}$ (STRICT)

(ii) Si $p = d$ $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$

(iii) Si $p > d$ $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$

avec injection compacte

Démonstration : voir [Brézis, p169]

IV/ Compléments

1) Inégalités de Poincaré

On a vu que l'inégalité de Sobolev $\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{p,d}\|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ donnait une information + forte que $W^{1,p} \subset L^{p^*}$

Ces inégalités s'étendent à $W_0^{1,p}(\Omega)$ par extension par zéro, comme nous l'avons expliqué :

$$\|f\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_{p,d}\|Df\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Si Ω est de plus de mesure finie (par ex si Ω est borné) on voit que

$$\forall f \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,d,\Omega,q}\|Df\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall q \in [1,p^*] \text{ par ex } q=p.$$

Une telle inégalité s'appelle "inégalité de Poincaré"

Et sur $W^{1,p}(\Omega)$?

Le problème (dès que Ω est de mesure finie) est qu'il faut "tuer" les constantes : si $f \equiv c \in \mathbb{R}$, $Df \equiv 0$

Travailler sur $W_0^{1,p}$ cela revient à imposer une condition de "Dirichlet" au bord. Sur $W^{1,p}$, on peut d'abord recentrer par la moyenne (cela revient à s'intéresser à une condition de type "Neumann")

Théorème Soit $p \in [1,+\infty[$.

Soit Ω un ouvert borné ayant une $W^{1,p}$ extension (par ex $\partial\Omega$ C^1). Soit q tq

- $q \in [1, p^* = \frac{dp}{d-p}]$ si $p < d$
- $q \in [1,+\infty[$ si $p = d$
- $q \in [1,+\infty]$ si $p > d$.

Il existe $C = C_{p,q,d,\Omega} > 0$ tq $\forall f \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\| f - \underbrace{\fint_\Omega f}_{\text{moyenne de } f \text{ sur } \Omega \ \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f} \|_{L^q(\Omega)} \leq C \, \| \nabla f \|_{L^p(\Omega)}$$

<u>Démonstration</u> : voir [Lieb-Loss, p 218]
(On utilise Rellich-Kondrachov) ∎

2) <u>Traces</u>

On a vu que pour Ω assez régulier (ayant une $W^{1,p}$-extension)
si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > d$, alors f s'étend en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. On peut donc parler de $f_{|\partial\Omega}$

→ quid si $p < d$?
C'est aussi parfois possible, mais plus délicat.
Etudions le cas du demi-espace (par cartes locales, c'est en fait le cas général).

Soit donc $H_+ = \{ x \in \mathbb{R}^d, \ x_d > 0 \}$
$\partial H_+ = H := \{ x_d = 0 \}$

<u>Fait</u> : Il existe $C > 0$ tq $\forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |g(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)|^p dx_1 \dots dx_d \right)^{1/p} \leq C \, \| g \|_{W^{1,p}(H_+)}$$

<u>Démo</u> : Voir [Brézis, p 196] ∎

On en déduit que l'application T

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^p(H_+)$$
$$g \longrightarrow g_{|H}$$

est continue pour la norme $W^{1,p}$: $\|T(g)\|_{L^p(H)} \leq C \|g\|_{W^{1,p}(H_+)}$

or $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)_{|H_+}$ est $W^{1,p}$-dense ds $W^{1,p}(H_+)$

Donc T se prolonge en un opérateur linéaire continue de $W^{1,p}(H_+)$ ds $L^p(H)$

Pour $f \in W^{1,p}(H_+)$, $T(f)$ est la trace de f sur H (c'est une fonction de $L^p(H)$)

3) Lire le chapitre IX du livre de Brézis !