Université Pierre et Marie Curie
Master de Mathématiques, M2

Analyse fonctionnelle, B003
Année universitaire 2017-2018
Ayman MOUSSA

Feuille de TD n° 1 - Intégration, espaces L^p

1 Théorie de la mesure

Exercice 1.1: *Tribu borélienne*

Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$ est la tribu engendrée par les boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1.2: *Petits ouverts denses*

Montrer qu'il existe des ouverts denses de $\mathbb{R}^d$ de mesure arbitrairement petite.

Exercice 1.3: *Fonction mesurable bornée*

Soit $f : \Omega \to [0,1]$ une fonction mesurable. Montrer l'existence d'une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_n$ telle que

$$f = \sum_n 2^{-n} \mathbb{1}_{A_n}.$$

2 Intégration

Exercice 2.1: *Exemples et contre-exemples*

1. Soit E une partie de X et E^c son complémentaire. Vérifier que l'inégalité de Fatou peut-être stricte grâce à la suite suivante : $f_n := \mathbb{1}_E$ si n pair, $f_n := \mathbb{1}_{E^c}$ si n impair.
2. Justifier que la domination est indispensable dans le théorème de convergence dominée.
3. Exhiber un contre-exemple justifiant qu'une hypothèse de "monotonie" serait insuffisante dans le théorème de convergence monotone.
4. Énoncer (et démontrer) un théorème de "convergence décroissante" valable.

Exercice 2.2: *Ben oui ça doit être vrai*

Soit (X,μ) un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que f prend une valeur finie presque partout.
2. Montrer que si f est d'intégrale nulle sur tout ensemble mesurable, alors elle est nulle presque partout.
3. Montrer la continuité de l'intégrale par rapport à la mesure : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\mu(A) < \eta$ implique $\|\mathbb{1}_A f\|_1 \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2.3: *La convergence presque partout n'est pas « topologisable »*

1. Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{L}^1(]0,1[)$ qui converge dans cet espace, mais pas presque partout.
2. En déduire qu'il n'existe pas de topologie sur l'espace des fonctions telle que la convergence au sens de cette topologie coïncide avec la convergence presque partout.

Exercice 2.4: *Dualité pour l'entropie*

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable positive d'intégrale 1 et telle que $f\log(f)$ soit intégrable.

1. Soit ϕ une fonction réelle mesurable telle que que $f\phi$ soit intégrable. Montrer que
$$\log\int e^{\phi}\,d\mu \geqslant \int f\log\left(\frac{e^{\phi}}{f}\right)d\mu.$$
Exhiber un cas d'égalité.
2. Montrer que
$$\int f\log(f)\,d\mu = \sup\left\{\int f\phi\,d\mu \;:\; \int e^{\phi}\,d\mu \leqslant 1\right\}.$$

3 Espaces L^p

Exercice 3.1: *Interpolation*

1. Démontrer l'inégalité de Hölder étendue :
$$\|\varphi_1\varphi_2\varphi_3\|_1 \leqslant \|\varphi_1\|_{\alpha_1}\|\varphi_2\|_{\alpha_2}\|\varphi_3\|_{\alpha_3},$$
dès lors que le membre de droite est fini et que $\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\alpha_3^{-1}=1$.
Indication : *Cette inégalité se généralise à n termes par récurrence.*
2. Soit $1 \leqslant p < q < \infty$ et $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)\cap\mathrm{L}^q(\Omega)$. Montrer que, pour tout $r \in]p,q[$ on a $f \in \mathrm{L}^r(\Omega)$ ainsi que l'estimation
$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^{\theta}\|f\|_q^{1-\theta},$$
où $\theta \in]0,1[$ est défini par $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.
3. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. Que peut-on dire de la nature géométrique et topologique de l'ensemble : $\{1 \leqslant p < \infty \;:\; f \in \mathrm{L}^p(\Omega)\}$?

Exercice 3.2: *Inclusions*

1. Démontrer que si $\mu(X) < \infty$ alors les espaces $\mathrm{L}^p(\mu)$ s'injectent continûment par ordre décroissant d'exposant.
2. Pour $p \neq q \in [1,\infty]$, démontrer que $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ n'est jamais vrai. Que dire dans le cas des $\ell^p(\mathbb{N})$?

Exercice 3.3: *Topologies*

Constuire une suite de de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ convergente dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et pas dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, une autre convergente dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et pas dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
Remarque : *De manière plus générale, pour $p < q$, les deux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ ne définissent jamais la même topologie sur* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$.

Exercice 3.4: *Continuité des translations et Riemann-Lebesgue*

1. Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ fixée. Montrer que $\|\tau_y f - f\|_p \xrightarrow[y\to 0]{} 0$, où $\tau_y f(x) = f(x-y)$.

2. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, $e^{-i}\hat{f}(\xi) = \widehat{\tau_{1/\xi}f}(\xi)$ et en déduire le lemme de Riemann-Lebesgue :
$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Exercice 3.5: *Fonctions tests*

1. Montrer que la fonction $\gamma : t \mapsto e^{-1/t}\mathbb{1}_{t>0}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et W un voisinage ouvert de K. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ strictement positive sur K et nulle hors de W.
3. Raffiner ce résultat de sorte que φ prenne ses valeurs dans $[0,1]$ et vale 1 sur K.
4. Montrer que si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $f \star \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3.6: *Inégalité de Young*

Soient $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$
Montrer que pour $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$ le produit de convolution $f \star g$ est un élément de L^r bien défini satisfaisant l'inégalité
$$\|f \star g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$
Indication :*Se ramener au cas $1 \leqslant p, q, r < \infty$ et procéder par dualité.*

Exercice 3.7: *Dualité*

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini . On considère par la suite des fonctions (ou classes de fonctions) à valeurs réelles uniquement. Un théorème du cours assure que, pour $1 \leqslant p < \infty$, on a $\mathrm{L}^{p'}(\mu) = (\mathrm{L}^p(\mu))'$ isométriquement. On va voir ici quelques cas particuliers illustrant ce résultat.

1. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$
$$\begin{aligned} T_p : \mathrm{L}^{p'}(\mu) &\longrightarrow \mathrm{L}^p(\mu)' \\ g &\longmapsto \left\{ \mathrm{L}^p(\mu) \ni f \mapsto \int_X gf \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$
est une application linéaire continue.
2. Montrer qu'en fait T_p est une isométrie (donc en particulier injective), pour tout $p \in [1, \infty]$. On a donc obtenu, pour tout $p \in [1, \infty]$:
$$\|g\|_{p'} = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \left| \int_X gf \mathrm{d}\mu \right|.$$
Indication : *Pour le cas $p > 1$, vérifier que si $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mu)$, la fonction $|g|^{p'-1}\mathrm{sgn}(g)$ est dans $\mathrm{L}^p(\mu)$. Pour le cas $p = 1$, revenir à la définition du sup essentiel : $\|g\|_\infty := \inf\left\{C \geqslant 0 : |g(x)| \leqslant C \text{ p.p.}\right\}$.*
3. Montrer que pour $1 \leqslant p < \infty$, on a $\ell^{p'}(\mathbb{N}, \mu) = \ell^p(\mathbb{N}, \mu)'$ isométriquement (μ est la mesure de comptage). Indication : *Penser à l'expression de la norme $\| \cdot \|_{p'}$ que l'on a obtenu à la question précédente et aux suites $\boldsymbol{e}_n := (0, \ldots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, 0, \ldots)$.*

Exercice 3.8:

1. Soit $p \in]1, \infty]$. Quels résultats du cours impliquent que, pour une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, il existe $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})$ (exposant conjugué) :

$$\int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(x)g(x)\mathrm{d}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

2. On peut donner un contre-exemple à la question précédente dans le cas où $p = 1$.
   (a) Considérer $h(x) := \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)(1 - |x|)$ et les « concentrations » $f_n(x) := nh(nx)$ (faire un dessin). Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans la sphère unité de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ vérifiant (1) pour $p = 1$ et une certaine extraction $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $\{|x| \geqslant \varepsilon\}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

   et en déduire que f est nulle presque partout.
   (c) Conclure.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ (continue à support compact), non nulle. Vérifier que la suite $(f(x-n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans tous les $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ pour $p \in]1, \infty[$. Vérifier que ce n'est pas le cas pour $p = 1$ et que pour $p = \infty$ il y a convergence faible$-\star$ vers 0.
   Indication : *Pour la première partie de la question, on pensera à la décomposition* $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} = \mathbb{1}_{|x|<A} + \mathbb{1}_{|x|\geqslant A}$, *et au fait que pour* $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})$, $g\mathbb{1}_{|x|\geqslant A}$ *tend vers* 0 *dans* $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})$ *quand* $A \to +\infty$.
   Remarque : *Dans le cas* $p \in]1, \infty[$, *convergence faible et convergence faible*$-\star$ *se confondent : les* L^p *sont réflexifs.*
4. Vérifier que la suite $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement$-\star$ convergente vers 0 dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 3.9: *Un critère d'unicité pour les limites faibles*

Soit $p \in]1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ et $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ tels que $f_n \rightharpoonup f$. On suppose par ailleurs que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout : $f_n \longrightarrow g$ p.p.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$ et que $g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$.
2. On veut prouver que $g = f$ presque partout.
   (a) Remarquer qu'il suffit de montrer que pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de $\mathrm{L}^p(\Omega)$, et $h \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ tels que :

$$\begin{array}{rcl} h_n & \rightharpoonup & 0 \\ h_n & \longrightarrow & h \ \text{ p.p.} \end{array}$$

   on a h nul presque partout.
   (b) Soit $\varphi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ et soit ε un élément fixé de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ strictement positif presque partout. En découpant :

$$\int_\Omega \varphi(x)h_n(x)\mathrm{d}x,$$

   selon que $|h_n| \leqslant |h| + \varepsilon$ ou non, montrer que

$$\int_\Omega \varphi(x)h(x)\mathrm{d}x = 0.$$

   (c) Conclure.