Université Pierre et Marie Curie
Master de Mathématiques, M2

Analyse fonctionnelle, B003
Année universitaire 2017-2018
Ayman MOUSSA

Feuille de TD n° 2 - Distributions

Sauf indication contraire, Ω désignera toujours un ouvert non vide $\mathbb{R}^d$.

1 Exemples

Exercice 1.1: *Masses de Dirac*

1. Pour $a \in \Omega$, montrer que l'application d'évaluation
$$\begin{aligned} \delta_a : \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(a), \end{aligned}$$
définit bien une distribution. On l'appelle **masse de Dirac** en a. Calculer les dérivées de δ_a, dans le cas de la dimension 1.
2. Montrer que les masses de Dirac ne sont pas des fonctions (*i.e.* qu'elles ne sont pas représentées par un élément de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$).

Exercice 1.2: *Valeur principale*

On se place sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

1. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Vérifier que $\displaystyle\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$ possède une limite lorsque $\varepsilon \to 0$ et que la forme linéaire qui à $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ associe cette limite est bien une distribution d'ordre inférieur ou égal 1. C'est la *valeur principale* de $\frac{1}{x}$, notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
2. En considérant une suite de fonctions test $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset \left[\frac{1}{2n}, 2\right]$ et $\varphi_n \equiv 1$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est exactement d'ordre 1.
3. Calculer $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

Exercice 1.3: *Pas de multiplication pour les distributions*

En considérant $x \mapsto x$, δ_0 et $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ montrer qu'il est impossible de définir un produit sur l'ensemble $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ qui soit associatif et prolonge le produit déjà défini d'une distribution par un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 1.4: *Mesures*

On dit qu'une forme linéaire T (à valeurs réelles) sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est positive si pour toute fonction test φ positive, $T(\varphi)$ est un réel positif.

1. Montrer qu'une forme linéaire positive est croissante au sens où $\varphi \leqslant \psi \Rightarrow T(\varphi) \leqslant T(\psi)$.
2. Soit K un compact de Ω. On fixe $\theta_K \in \mathscr{D}(\Omega)$ valant 1 sur K. Encadrer tout élément de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ entre deux éléments de la droite vectorielle $\mathbb{R}\theta_K$. En déduire que T est une distribution d'ordre 0 puis que l'ensemble des formes linéaires positives s'injecte dans le dual topologique de $\mathscr{C}^0_{\mathrm{c}}(\Omega)$.
Remarque : *Un théorème de représentation de Riesz permet de préciser ce résultat : les distributions positives sur Ω s'identifient en fait aux mesures de Radon définies sur la tribu des boréliens de Ω.*

Exercice 1.5: L^p *par dualité*

Soit $p \in [1, \infty[$ et B_p la boule unité de $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Montrer que si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est bornée sur $\mathrm{B}_p \cap \mathscr{D}(\Omega)$, alors $T \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$.

2 Support d'une distribution

Exercice 2.1: *Contre-exemples*

1. Trouver une fonction test φ nulle en $0 \in \mathbb{R}^d$ et une distribution T dont le support est réduit à $\{0\}$ et tel que $T(\varphi)$ soit non nul.
   À retenir : $\varphi_{|\mathrm{Supp}(T)} = 0 \not\Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$, *mais si* V *est un voisinage de* $\mathrm{Supp}(T)$, $\varphi_{|V} = 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$.
2. Dans le même genre, si $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ s'annule sur le support de T, peut-on affirmer que $fT = 0$?

Exercice 2.2: *Combinaisons de masses de dirac*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n points distincts de Ω.

1. Montrer l'existence de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telles que $\theta_i(x_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker, pas la masse de Dirac !).
2. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\Big[\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \varphi(x_i) = 0\Big] \Rightarrow \Big[T(\varphi) = 0\Big]$. Montrer que $T \in \mathrm{Vect}(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$.
   Remarque : *De manière plus générale, on peut montrer qu'une distribution dont le support est un ensemble fini est une combinaison linéaire finie de dérivées de masses de dirac centrées en les points de cet ensemble.*

3 Dérivation de distributions

Exercice 3.3: *Opérations élémentaires*

1. Quelle est la dérivée de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$? Et la dérivée de $x \mapsto |x|$?
2. Soit $\theta \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $(\theta T)' = \theta' T + \theta T'$. Donner une formule pour $(\theta T)^{(n)}$.
3. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, vérifier que $\partial^\alpha \partial^\beta T = \partial^\beta \partial^\alpha T$.
4. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note τ_h l'opérateur défini de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même par $\tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi)$. Vérifier que les définitions « fonctionnelle » et « distributionnelle » de τ_h coïncident.

Exercice 3.4: *Dérivée(s) nulle(s)*

1. On considère sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ la forme linéaire L (intégration sur $\mathbb{R}$) et l'opérateur D (dérivation). Montrer que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{L} = \mathrm{Im}\,\mathrm{D}$.
2. Soit $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale 1. Montrer que la droite engendrée par θ et l'hyperplan $\mathrm{Ker}\,\mathrm{L}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.
3. Montrer qu'une distribution de dérivée nulle est constante.
   Remarque : *Ce résultat admet la généralisation utile suivante : si* Ω *est un ouvert connexe et* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *vérifie* $\partial_i T = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, d]\!]$, *alors* T *est une constante.*
4. Que dire d'un élément $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T' \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$?
   Indication : *Considérer une primitive de* T' *- c'est donc une fonction* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *- et remarquer qu'elle a la même dérivée faible que* T *!*

5. Que dire d'un élément $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T^{(n)} = 0$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$?
   Remarque : *Ce résultat admet la généralisation utile suivante : si Ω est un ouvert connexe et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ vérifie $\partial^\alpha T = 0$ pour tout $|\alpha| = n$, alors $T \in \mathbb{P}_n$.*

Exercice 3.5: *Solutions faibles*

Soit $a \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose que l'on a $T' + aT = f$ au sens des distributions.

1. On pose $g(x) := \exp\left\{\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right\}$. Montrer que $(gT)' = fg$.
2. En déduire que $gT \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, puis $T \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
3. En déduire finalement que l'équation est vérifiée au sens usuel.

4 Convolution

Exercice 4.1: *Généralités*

1. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, égale à 1 dans un voisinage de 0, on note $\theta_n(x) := \theta(x/n)$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ une approximation de l'unité que l'on suppose paire (pour simplifier, mais ce n'est pas nécessaire). Vérifier que $\varphi_n := (T \star \alpha_n)\theta_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightharpoonup T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   Remarque : *On a bien sûr un résultat similaire pour un ouvert Ω quelconque.*
2. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de translation τ_a est en fait un opérateur de convolution, *i.e.* qu'il existe une distribution S_a tels que $\tau_a T = T \star S_a$.
   Indication : *Calculer $T \star \delta_a$ ...*
3. Reprendre la question précédente avec les opérateurs de dérivations ∂^α, où $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
4. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, calculer $\delta_x \star \delta_y$. Calculer (en dimension 1) $\delta_0' \star \delta_0'$.
5. En considérant la fonction de Heaviside (*i.e.* $H := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$), la dérivée de la masse de Dirac et la fonction constante égale à 1, montrer que, sans hypothèses sur les supports, le produit de convolution de trois distributions peut ne pas être associatif.
   Remarque : *On peut étendre la définition de « convolutivité » au cas d'un nombre fini quelconque de distributions. Dans ce cas, si la famille est convoluable (dans son ensemble), alors le produit est bien associatif. Le problème ici est justement que 1 et H ne sont pas convoluables et du coup la famille $(1, H, \delta)$ non plus !*

Exercice 4.2: *Densité des polynômes*

1. Soit T une distribution de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support compact tendant vers T dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit T une distribution et m un entier naturel non nul tels que pour tout multi-indice α vérifiant $|\alpha| \geqslant m$, $\partial^\alpha T = 0$. Montrer que T est une fonction polynômiale (de plusieurs variables) de degré total inférieur ou égal à $m - 1$.
   Indication : *Le cas $m = 1$ est en fait un résultat du cours, que l'on pourra utiliser tel quel : si $\partial_{x_i} T = 0$ pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, alors T est une constante.*
3. Soit T une distribution à support compact et P un polynôme. Montrer que la distribution $T \star P$ est en fait un polynôme.
4. On considère la suite de polynômes de d variables

$$P_n(x) := \frac{n^d}{\sqrt{\pi}^d}\left(1 - \frac{\|x\|^2}{n}\right)^{n^3}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to+\infty} n^{-d} P_n(u/n) = \sqrt{\pi}^{-d} e^{-\|u\|^2}$.

(b) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et calculer la limite.
Indication : *On pensera au changement de variable $u = nx$. On rappelle que* $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

5. Déduire de tout ce qui précède la densité des polynômes dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 4.3: *Commutants*

1. Soit $L : \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ une application linéaire continue qui commute avec les opérateurs de translations τ_x. Démontrer qu'il existe une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $L(\varphi) := T \star \varphi$.
Indication : *Observer que, nécessairement,* $\langle T, \varphi\rangle = L(\check{\varphi})(0)$.
2. Soit maintenant $M : \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ une application linéaire continue qui commute avec les opérateurs de dérivations ∂_{x_j}, $j \in [\![1, d]\!]$.
   (a) On fixe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathbb{R}^d$. On pose $h(x) := (\tau_{-x}M\tau_x)(\varphi)(u)$.
      (i) On considère la fonction
$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (a, b) &\longmapsto (\tau_{-a}M\tau_b)(\varphi)(u) = M\Big[z \mapsto \varphi(z - b)\Big](u + a).\end{aligned}$$
      Vérifier que Φ est dérivable par rapport à ses d premières variables et calculer l'expressions des dérivées partielles correspondantes.
      (ii) Faire de même pour les d dernières variables.
      Indication : *On reviendra à la définition à partir des taux d'accroissements directionnels. On rappelle que pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $h^{-1}(\tau_{-he_i}\varphi - \varphi) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \partial_{x_i}\varphi$* ***dans*** *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*
      (iii) En déduire que h est constante puis que M commute avec les opérateurs de translations.
   (b) Prouver finalement l'existence de $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $M(\varphi) := T \star \varphi$.

Exercice 4.4: *Hypoellipticité*

Le but de cet exercice est de démontrer qu'un opérateur différentiel à coefficients constants admettant une solution fondamentale dont le support singulier est réduit à $\{0\}$ vérifie une propriété de régularisation intéressante. Soit donc $P(\partial)$ un tel opérateur, E une solution fondamentale supposée égale à une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$. Nous allons montrer que si $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ vérifie $P(\partial)(T) = f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $T \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. Soit $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur $\overline{\mathrm{B}(0,1)}$. Montrer que $\psi := P(\partial)(\eta E) - \delta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.
2. Prouver que pour $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a $T = (\eta E)\star P(\partial)(T) - \psi\star T$ et en déduire que si $P(\partial)(T) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors T est effectivement une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
3. Donner des exemples d'opérateurs différentiels vérifiant cette propriété.

Remarque : *De manière un peu plus générale, un opérateur différentiel $P(\partial)$ est dit* hypoelliptique *si pour toute distribution T on a* $\mathrm{SingSupp}(P(\partial)(T)) = \mathrm{SingSupp}(T)$. *On peut remarquer que l'inclusion* $\mathrm{SingSupp}(P(\partial)(T) \subseteq \mathrm{SingSupp}(T)$ *est toujours vérifiée, si bien que l'hypoellipticité se ramène à montrer l'inclusion inverse. C'est ce que nous avons fait dans cet exercice, dans le cas particulier où $P(\partial)(T)$ est une fonction lisse, ce qui veut dire que son support singulier est l'ensemble vide.*

Exercice 4.5: *L'algèbre $\mathscr{D}'_+$*

On pose $\mathscr{D}'_+ := \{T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Supp}(T) \subset [0, +\infty[\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}'_+$ est une algèbre de convolution unitaire contenant H, la fonction de Heaviside $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.
2. Déterminer l'inverse (pour $\star$) dans $\mathscr{D}'_+$ de H, δ' et $\delta' - \lambda\delta$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Lorsque l'inverse de $T \in \mathscr{D}'_+$ existe on le note T^{-1}.

3. Si $P(\mathrm{d})$ est un opérateur différentiel à coefficients constants (une variable). Que représente l'élément $[P(\mathrm{d})(\delta)]^{-1}$ si il existe ?
4. Soit P un polynôme non nul de racines $z_1, \ldots, z_m$. Exprimer $P(\mathrm{d})(\delta)$ comme un produit de convolution de m éléments de $\mathscr{D}'_+$. En déduire que $P(\mathrm{d})(\delta)$ possède un inverse dans l'algèbre $\mathscr{D}'_+$ que l'on déterminera. Qu'en déduit-on ?