Université Pierre et Marie Curie
Master de Mathématiques, M2

Analyse fonctionnelle, B003
Année universitaire 2017-2018
Ayman MOUSSA

Feuille de TD n° 3 - Espaces de Sobolev

Exercice 1: *Espace de Sobolev sur un intervalle*

Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in \mathrm{W}^{1,p}(I)$. Montrer que f est continue et même Hölderienne lorsque $p > 1$, et préciser alors son exposant.
   Indication : *Considérer une "primitive" de f'.*
2. Montrer que $\mathrm{W}^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(I)$.
3. Montrer que f se prolonge continûment à $\overline{I}$.
4. Soit $T \in \mathscr{D}'(I)$ telle que $T' \in \mathrm{L}^2(I)$. Montrer que $T \in \mathrm{H}^1(I)$.

Exercice 2: *Puissances*

Déterminer les couples $(\alpha, p) \in \mathbb{R} \times [1, \infty]$ tels que $x \mapsto \|x\|^\alpha \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathrm{B}_d)$, où B_d est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 3: *Caractérisation des fonctions lipschiztiennes*

1. Montrer que $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est une fonction Lipschitzienne si et seulement si $T' \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.
   Indication : *Pour l'aspect « nécessaire » on pourra utiliser que $h^{-1}(\tau_{-h}T - T) \underset{h\to 0}{\rightharpoonup} T'$ (en quel sens ?).*
2. Cette caractérisation est-elle toujours valable sur $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$? Et sur $\mathscr{D}'(\Omega)$ pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$?

Exercice 4: *Sobolev par translations*

Soit $p \in (1, \infty]$.

1. Montrer que $f \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si il existe une constante C_f telle que $\|\tau_h f - f\|_p \leqslant \mathrm{C}_f |h|$.
2. Étudier le cas $p = 1$.
3. Montrer, en utilisant la première question, que si $p > 1$ et $f \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, alors $|f|$ est aussi dans $\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ainsi que f^+ et f^-.
4. Le résultat de la question précédente est toujours vrai pour $p = 1$. Nous allons en fait montrer un résultat plus fort.
   (a) Soit $\beta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\beta(f) \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et déterminer son gradient.
   (b) En déduire que si $f \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors $|f| \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et que $\nabla|f| = \mathbb{1}_{f>0}\nabla f - \mathbb{1}_{f<0}\nabla f$. Que valent ∇f^+ et ∇f^- ?
   Indications : *Ces expressions sont en particulier valides lorsque $f \in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$!*
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Que dire de ∇f sur l'ensemble $\{f = \alpha\}$? Indication : *Utiliser que $f = f^+ - f-$!*
   (d) Pour $f \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, que peut-on dire des applications $f \mapsto |f|$, $f \mapsto f^+$ et $f \mapsto f^-$?