Université Pierre et Marie Curie
Master de Mathématiques, M2

Analyse fonctionnelle, B003
Année universitaire 2017-2018
Ayman MOUSSA

Feuille de TD n° 4 - Injections de Sobolev

Exercice 1: *Contre-exemples*

1. Nier l'injection $\mathrm{H}^1(\mathrm{B}_d) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_d)$ dès lors que $d > 2$ (B_d est la boule unité de $\mathbb{R}^d$).
2. Soit $0 < \alpha < 1/2$. En considérant la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{\|x\|<1} \ln(\|x\|^{-1})^\alpha$, mettre en défaut l'injection précédente également pour $d = 2$.
3. Montrer par un exemple simple qu'il existe des ouverts de $\mathbb{R}^d$ pour lesquels les espaces de Sobolev correspondants n'admettent pas d'opérateurs de prolongement, et que pour $p > d$ l'injection de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ ne peut pas être vraie pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Exercice 2: *Trudinger*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné convexe. Dans toute la suite « $\lesssim$ » signifiera « $\leqslant$ à une constante près ne dépendant que de Ω » (notamment indépendante des variables impliquées dans l'inégalité !).

1. Nous admettons pour l'instant l'estimation suivante

$$\forall p \in [1,\infty[,\ \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega), \quad \|u\|_p \lesssim \sqrt{p}\,\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}. \quad (\star)$$

Montrer l'existence de $\alpha > 0$ ne dépendant que de Ω telle que pour tout élément u de la boule unité de $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on ait $\exp(\alpha u^2) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

Indication : *Cette propriété est un cas particulier d'une inégalité découverte par Trudinger en 1967, c'est sa méthode de preuve que nous suivons dans cet exercice. Au début des années 70 Moser a établi une autre preuve de ce résultat (utilisant le réarrangement décroissant) et considérablement amélioré cette estimation.*

2. Montrons l'estimation $(\star)$.

   (a) Montrer

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2),\ \forall x \in \Omega, \quad |\varphi(x)| \lesssim \int_\Omega |\varphi(y)|\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_{\Omega_t} \frac{|\nabla\varphi(z)|}{t^3}|z-x|\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t,$$

   où $\Omega_t := \{z \in \Omega : |z-x| \leqslant t\mathrm{D}_\Omega\}$ et D_Ω est le diamètre de Ω.

   (b) Soit $\gamma : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathrm{B}(0,\mathrm{D}_\Omega)}|x|^{-1}$. Montrer

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \forall p \in [1,\infty[, \quad \|\psi\varphi\|_1 \lesssim \left(\|\psi\|_{p'}\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + \int_\Omega (|\psi| \star \gamma)|\nabla\varphi|\right).$$

   (c) En déduire $(\star)$.

Exercice 3: *Poincaré*

On suppose Ω de *largeur finie*, c'est-à-dire borné dans une direction. Pour tout $1 \leqslant p < \infty$, montrer l'existence d'une constante $\mathrm{C}_{\Omega,p}$ telle que, pour tout $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}_{\Omega,p}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

Remarque : *La preuve montrera en fait qu'une dérivée le long d'une seule direction suffit.*

Exercice 4: *Régularité elliptique*

Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $u - \Delta u = f$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que pour tout élément $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^d} uv = \int_{\mathbb{R}^d} fv.$$
Remarque : *L'égalité précédente dans laquelle l'espace des fonctions tests a été considérablement élargi s'appelle la* formulation variationnelle *de l'EDP $u - \Delta u = f$.*

2. Pour $h \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, et $\psi \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ on introduit l'opérateur $\mathrm{D}_h \psi(x) = |h|^{-1}(\psi(x+h) - \psi(x))$, dont on vérifie qu'il est continu de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Écrire la formulation variationnelle avec la fonction test $\varphi := \mathrm{D}_{-h}\mathrm{D}_h u$.

3. En déduire que $\|\mathrm{D}_h \nabla u\|_2 \leqslant \|f\|_2$ et conclure.
Indication : *Penser à la caractérisation par translation des espaces de Sobolev établie dans la feuille précédente d'exercices.*

4. Déduire de ce qui précède ce cas particulier du *Lemme de Weyl* : si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\Delta u = 0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Remarque : *Le véritable Lemme de Weyl est autrement plus puissant : pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ satisfait $\Delta T = 0$, alors $T \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. De manière plus générale, on montre que l'opérateur différentiel Δ est* hypoelliptique *: il conserve le support singulier du terme source.*