Chapitre 1 :

Inégalité de Brunn-Minkowski

Théorème (Inégalité de Prékopa-Leindler)

Soit $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $t \in [0,1]$ tels que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$h((1-t)x + ty) \geqslant f(x)^{1-t} \, g(y)^t \qquad (*)$$

Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^t$

Il s'agit en fait d'un énoncé pour deux fonctions :

pour $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a :

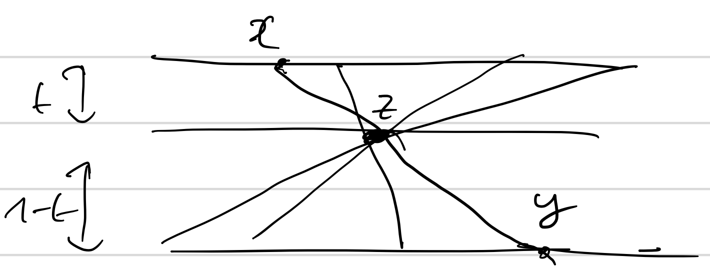
$$\int \sup\left\{ f(x)^{1-t} g(y)^t \,;\, (1-t)x + ty = z \right\} dz \geqslant \left(\int f\right)^{1-t} \left(\int h\right)^t$$

On dit parfois que l'inégalité de Prékopa-Leindler est une inégalité de Hölder inverse.

Pour deux fonctions positives f, g :

$$\int f^{1-t} g^t \overset{H.}{\leqslant} \left(\int f\right)^{1-t} \left(\int g\right)^t \overset{P\text{-}L.}{\leqslant} \int \sup_{z=(1-t)x+ty} \left\{ f(x)^{1-t} g(y)^t \right\} dz$$

en particulier $x = y = z$



Pour démontrer l'inégalité de Prékopa-Leindler, on peut commencer par observer qu'elle se *tensorise*, au sens où si l'on sait la démontrer jusqu'à la dimension $n \geq 1$, alors elle est aussi vraie en dimension $n+1$. En effet, soit $f, g, h : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad h((1-t)x + ty) \geq f^{1-t}(x) g^t(y)$. Écrivons les vecteurs x de $\mathbb{R}^{n+1}$ sous la forme $(x_1, \overline{x})$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ donnés, on a

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad h((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)\overline{x} + t\overline{y}) \geq f^{1-t}(x_1, \overline{x}) g^t(y_1, \overline{y})$$

et donc, par l'inégalité de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$H((1-t)x_1 + ty_1) \geq F^{1-t}(x_1) G^t(y_1)$$

où l'on a posé, pour tous les $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t, \overline{x}) \, d\overline{x}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, \overline{x}) \, d\overline{x}, \quad G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t, \overline{x}) \, d\overline{x}.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, on conclut en re-appliquant l'inégalité de Prékopa-Leindler, cette fois en dimension 1 et en utilisant Fubini ($\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h = \int_{\mathbb{R}} H$ et idem pour f et g).

Démonstration 1 de PL (en dimension 1)

Fait : Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux boréliens non-vides.
Alors :
$$|A+B| \geq |A| + |B| \qquad (**)$$

Démo : on suppose d'abord que A et B sont compact. Comme $(**)$ est invariante par translation, on peut supposer que $\max(A) = \min(B) = \{0\}$. Mais alors
$$A+B \supset A \cup B \text{ et } |A \cup B| = |A| + |B|.$$
Pour des boréliens généraux, on conclut par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue.
$\blacksquare$

On se donne f, g, h intégrables vérifiant l'hypothèse $(*)$
On se ramène à la situation suivante :

→ Par convergence monotone, on peut supposer que f et g sont essentiellement bornés.

→ Par homogénéité, on peut supposer que
$$\text{sup-ess}(f) = \text{sup-ess}(g) = 1.$$

On rappelle que pour toute fonction borélienne, on a :
$$\int b = \int_0^{\infty} |\{b > s\}| \, ds$$

On a alors :
$$\int h \geq \int_0^1 |\{h > s\}| \, ds$$

Pour $s \in \mathbb{R}_+$, l'hypothèse $(*)$ garantit que
$$\{h > s\} \supset (1-t)\{f > s\} + t\{g > s\}$$
Mais pour $s \in [0, 1[$, les ensembles de droites sont non vides, et donc par le **Fait** on a

$$|\{h > s\}| \geq |(1-t)\{f > s\}| + |t\{g > s\}|$$
$$= (1-t)\,|\{f > s\}| + t\,|\{g > s\}|$$

En intégrant pour $s \in [0, 2[$ on obtient donc

$$\int h \geq (1-t)\int f + t\int g$$

qui est $\geq \left(\int f\right)^{1-t}\left(\int g\right)^{t}$ ☒

Rq : Il pourrait sembler qu'on peut obtenir une conclusion plus forte. Mais ce n'est pas le cas. Pourquoi ?

Démonstration 2 (de PL en dim 1)

~~Deuxième démonstration du Théorème 1.2 pour n = 1.~~ On va supposer pour cette démonstration que les fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont *continues* et *strictement positives sur* $\mathbb{R}$. On peut se ramener à ce cas là par approximations (c'est vite dit...). Par homogénéité, on peut supposer que $\int_{\mathbb{R}} f = 1 = \int_{\mathbb{R}} g$. Les fonctions F, G définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{-\infty}^{x} g$$

sont alors des bijections C^1 strictement croissantes de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. Ainsi la fonction

$$T := G^{-1} \circ F$$

est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{T(x)} g$$

et donc

$$f(x) = T'(x)g(T(x)).$$

En introduisant la bijection C^1 strictement croissante $T_t(x) := (1-t)x + tT(x)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} h(T_t(x))T_t'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(T_t(x))((1-t) + tT'(x))\,dx.$$

L'hypothèse $(\star)$ et l'inégalité artithmético-géométrique (utilisable car $\boxed{T' \geq 0}$) nous disent que

$$h(T_t(x)) \geq f^t(x)g^t(T(x)) \quad \text{et} \quad (1-t) + tT'(x) \geq T'(x)^t$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} f^{1-t}(x)g^t(T(x)T'(x)^t\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

□

L'inégalité de PL est une forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Théorème : Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$. On a :

(BM) $$|(1-t)A + tB| \geq |A|^{1-t} |B|^t$$

← forme multiplicative ou a-dimensionnelle

Démo : On applique l'inégalité de PL à

$$f = 1_A \qquad g = 1_B$$

On a $$\sup_{z=(1-t)x+ty} 1_A(x)^{1-t} 1_B(y)^t = 1_{(1-t)A+tB}(z)$$

$\blacksquare$

La forme classique de l'inégalité de BM est plutôt :

Théorème Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ non vides. Alors

(BM) $$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}$$

← forme dimensionnelle.

Ce théorème implique le précédent de manière triviale. Il lui est équivalent, par homogénéité de la mesure de Lebesgue : pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ non vides, tels que $|A| \neq 0$ et $|B| \neq 0$ on applique la forme multiplicative avec

$$\tilde{A} := \frac{A}{|A|^{1/n}} \quad \text{et} \quad \tilde{B} := \frac{B}{|B|^{1/n}}$$ qui sont de volume $= 1$

et $$t = \frac{|B|^{1/n}}{|A|^{1/n} + |B|^{1/n}} \quad \left(\Rightarrow 1-t = \frac{|A|^{1/n}}{|A|^{1/n} + |B|^{1/n}} \right)$$

$\blacksquare$

La première conséquence classique de l'inégalité de Brunn-Minkowski est l'inégalité isopérimétrique. Notons B_2^n la boule euclidienne de rayon 1, $B_2^n := \{x \in \mathbb{R}^n \, ; |x| \leq 1\}$. On a alors, pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ que $A + \varepsilon B_2^n$ consiste en l'ensemble des points à distance au plus ε de A :

$$A + \varepsilon B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Par conséquent, si on pose

$$|\partial A| := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{|A + \varepsilon B_2^n| - |A|}{\varepsilon},$$

on peut se persuader que, lorsque A a un bord régulier, cette quantité vaut bien la mesure de surface du bord de A. L'inégalité isopérimétrique affirme qu'à volume fixé, la mesure de surface du bord est minimale pour les boules euclidienne.

Fait. — *Soit A une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ de mesure non-nulle et soit B une boule euclidienne telle que $|A| = |B|$. Alors on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |A + \varepsilon B_2^n| \geq |B + \varepsilon B_2^n|$$

et donc $|\partial A| \geq |\partial B|$.

Démonstration. — Prenons $B = rB_2^n$ avec $r > 0$ tel que $|A| = |rB_2^n|$. Comme il y a égalité dans l'inégalité de Brunn-Minkowski (1.2) lorsque les ensembles sont homothétiques et convexes (n'est-ce pas ?), on déduit bien de (1.2) que $|A + \varepsilon B_2^n|^{1/n} \geq |rB_2^n + \varepsilon B_2^n|^{1/n}$. □

Nous allons voir bien d'autres applications, en association avec de la convexité et de la log-concavité.

Mais remarquons que l'avantage de la version fonctionnelle (PL) est de s'étendre naturellement à d'autres mesures que la mesure de Lebesgue.

Le résultat suivant est un exemple très important :

<u>Théorème</u> : Soit $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant, pour tout $t \in [0,1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$,

(CV) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $(1-t)V(x) + tV(y) - V((1-t)x + ty) \geq \delta t(1-t)\frac{|y-x|^2}{2}$

Alors pour $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant la condition

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n ; \quad h((1-t)x + ty) \geq e^{-\delta t(1-t)|y-x|^2} f(x)^{1-t} g(y)^t$$

on a : $\int h e^{-V} \geq \left(\int f e^{-V}\right)^{1-t} \left(\int g e^{-V}\right)^t$

<u>Remarque</u>

- (PL) correspond à
- Toute fonction convexe vérifie (CV) avec $\delta = 0$.
- La fonction $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$ vérifie (CV) avec $\delta = 1$

Exercice : Soit V de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$(CU)\ \forall t \in [0,1] \iff \mathrm{Hess}_x V \geq \delta I_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(C'est un exercice en dim 1)

Démonstration du théorème

on applique (PL) à $he^{-V}, fe^{-V}, ge^{-V}$

qui vérifient $(*)$

$\boxtimes$

Application : Si μ est une mesure de la forme $d\mu = e^{-V} dx$ avec V convexe, alors μ vérifie (BM) multiplicatif : $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu((1-t)A + tB) \geq \mu(A)^{1-t} \mu(B)^t$$