# Chapitre 2

# Convexité et log-concavité

On dit qu'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est un <u>corps convexe</u> de $\mathbb{R}^n$ si $K$ est <u>convexe</u>, <u>compact</u>, <u>d'intérieur non-vide</u>.

ici, ça équivaut à dire que $K$ n'est pas inclus dans un sous-espace affine strict de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\mathrm{Aff}(K) = \mathbb{R}^n$)

Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe avec $0 \in \mathrm{int}(K)$, on définit sa <u>jauge</u> $j_K$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j_K(x) := \inf \{ a > 0 \, ; \, x \in aK \}$$

On voit que :

(i) $j_K$ est positivement 1-homogène : pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$ : $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$

(ii) $j_K$ est convexe, ce qui équivaut en vertu de (i) à : $j_K(x+y) \leq j_K(x) + j_K(y)$.

<u>Exemple</u> : $K = \{ x \in \mathbb{R}^n ; |x_1| \leq 1 \}$, $\quad j_K(x) = |x_1|$

Une application $j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ positivement 1-homogène et convexe s'appelle une <u>semi-norme</u>.

Si $j$ est une semi-norme, alors $K := \{ j \leq 1 \}$ est un convexe ayant $0$ dans son intérieur, et alors $j = j_K$.

On dit que $K$ est <u>symétrique</u> si $K = -K$. Lorsqu'il est d'intérieur non vide, on a automatiquement $0 \in \mathrm{int}(K)$, et sa jauge est alors paire.

Que manque-t-il à une semi-norme paire pour être une norme ? La propriété : $j(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Cela entraîne que $K = \{ j \leq 1 \}$ est <u>compact</u> (Exercice)

On a donc :

<u>Propriété</u> : Si $K$ est un corps convexe symétrique, alors sa jauge $j_K$ est une <u>norme</u>, souvent notée $\|\cdot\|_K$.

Et si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors $K=\{\|\cdot\|\leq 1\}$ est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$. Si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ est une base de $E$ , on peut considérer l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ a = (a_1, \dots, a_n) & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \end{array}$$

Cette application $T$ est évidement un isomorphisme (algébrique) entre $\mathbb{R}^n$ et $E$. De plus, si on définit sur $\mathbb{R}^n$ la norme

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \qquad \|a\| := \|T(a)\|_E = \|\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i\|_E$$

alors $T$ est une isométrie entre les evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|_E)$. On a ainsi un dictionnaire entre les espaces vectoriels normés de dimension $n$ et les normes sur $\mathbb{R}^n$ : tout espace vectoriel normé de dimension $n$ est isométrique à un $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pour une certaine norme $\|\cdot\|$. Par conséquent, les espaces vectoriels normés de dimension $n$ sont en correspondance avec les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$.

Pour $p \geq 1$, on définit la norme $\|\cdot\|_p$, que l'on préfère parfois noter $\|x\|_{\ell_p^n}$, par

$$\|x\|_p = \|x\|_{\ell_p^n} := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{pour} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

et on appelle $\ell_p^n$ l'evn correspondant :

$$\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p).$$

La boule unité de cet espace est notée $B_p^n$. La norme $\|\cdot\|_2$ sera donc aussi notée $|\cdot|$.

***Proposition*** **($\ell^n_{\log(n)} \simeq \ell^n_\infty$).** — *Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_{\ell_\infty^n} \leq \|x\|_{\ell^n_{\log(n)}} \leq C\,\|x\|_{\ell_\infty^n}.$$

*Démonstration.* — Voir exercice ci-dessous. □

***Proposition*** **($\ell^n_{\log(n)} \simeq \ell^n_\infty$).** — *Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_{\ell^n_\infty} \leq \|x\|_{\ell^n_{\log(n)}} \leq C\,\|x\|_{\ell^n_\infty}.$$

*Démonstration.* — Voir exercice ci-dessous. □

***Exercice.*** — *La distance géométrique $d_g(K,L) \geq 1$ entre deux corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (ou entre les evn correspondants) est définie par*

$$d_g(K,L) = \inf\{C > 0, \exists \lambda > 0, \quad \lambda K \subset L \subset C\lambda K\}.$$

*En d'autres termes, il s'agit de la meilleure constante $c \geq 1$ pour laquelle on a, pour un certain $r > 0$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad r\|x\|_K \leq \|x\|_L \leq c\,r\|x\|_K.$$

*Soit $q \geq p \geq 2$. Trouver un encadrement entre-elles des normes $\|\cdot\|_p$ et en déduire que*

$$d_g(\ell^n_p, \ell^n_q) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, son dual $E^*$ (qui est l'espace des formes linéaires continues) est muni de la norme dite duale :

$$\forall \xi \in E^*, \quad \|\xi\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} |\xi(x)|.$$

Si on représente un evn $E$ de dimension $n$ dans $\mathbb{R}^n$ comme précédemment, alors on peut utiliser la correspondance entre vecteurs et formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ via le produit scalaire standard :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \tag{1.1}$$

Ainsi, si $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, alors on a (isométriquement)

$$E^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$$

dans la dualité donnée par (1.1), où la norme duale est définie par

$$\|y\|_* := \sup_{\|x\|\leq 1} |x \cdot y|.$$

Il résulte du théorème de Hanh-Banach que $(\|\cdot\|_*)_* = \|\cdot\|$ (voir la remarque ci-dessous). Par conséquent, toute norme peut s'écrire comme un supremum :

$$\|x\| = \sup_{\|y\|_*\leq 1} |x \cdot y|.$$

***Remarque.*** — *Si $K$ est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, alors la boule unité du dual de $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ est appelée le* polaire *de $K$ et est notée $K^\circ$, c'est à dire : $(\|\cdot\|_K)_* = \|\cdot\|_{K^\circ}$, soit encore*

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n\ ;\ x \cdot y \leq 1,\ \forall x \in K\}.$$

*On a $x \cdot y \leq \|x\|_K \, \|y\|_{K^\circ}$. Bien que nous n'en ayons pas besoin, signalons qu'il découle du théorème de Hanh-Banach sous sa forme géométrique (ou plus simplement par le théorème de projection sur un convexe) que*

$$(K^\circ)^\circ = K$$

*(surtout $K = (K^\circ)^\circ$...) ou de manière équivalente, qu'en dimension finie $E^{**} = E$ isométriquement, c'est-à-dire $(\| \cdot \|_*)_* = \| \cdot \|$. Notez que pour $x \in \partial K$, il existe donc $y \in \partial K^\circ$ tel que $x \cdot y = 1$ (en tout point du bord d'un convexe on peut trouver un hyperplan tangent).*

Il est classique que pour $p \in [1, +\infty]$ on a (isométriquement)

$$(\ell_p^n)^* = \ell_q^n \qquad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

avec la convention que $0 = \frac{1}{\infty}$. De manière équivalente $(B_p^n)^\circ = B_q^n$. Notez le rôle particulier de l'espace euclidien $\ell_2^n$.

***Exercice* (Fonction $\Gamma$).** — *La fonction $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}$ définie pour $x > 0$ intervient dans de très nombreux calculs. Le comportement pour $x$ grand est donné par la formule de Stirling*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi x}\,\Big(\frac{x}{e}\Big)^x \left(1 + \mathrm{O}\big(\frac{1}{x}\big)\right) \sim \sqrt{2\pi x}\,\Big(\frac{x}{e}\Big)^x.$$

*En pratique, on se contente souvent de l'estimée :*

$$\log \Gamma(x+1) = x \log\big(\frac{x}{e}\big) + \mathrm{o}(x),$$

*ou de la forme équivalente*

$$\big(\Gamma(x+1)\big)^{1/x} \sim \frac{x}{e}.$$

*Dans cette dernière équivalence, on peut évidemment remplacer $\Gamma(x+1)$ par $\Gamma(x)$.*

*À titre d'exercice, démontrer l'estimation suivante (en général amplement suffisante) lorsque $x$ est entier : pour $n \geq 1$,*

$$\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \leq n! \leq n^n.$$

***Exercice* (Volume de la boule euclidienne et concentration)**

*On rappelle que la mesure sphérique $\tilde{\sigma}$ sur la sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ peut être définie, pour une partie borélienne $A \subset S^{n-1}$, par la mesure de Lebesgue du cône engendré multipliée par $n$ :*

$$\tilde{\sigma}(A) = n\big|\{tu\,;\ t \in [0,1],\ u \in A\}\big| = n\big|\bigcup_{t\in[0,1]} tA\big|.$$

*On montre aussi que $\tilde{\sigma}$ est, à constante (multiplicative) près, l'unique mesure borélienne sur $S^{n-1}$ invariante par rotations. On rappelle la formule d'intégration en polaire : pour toute fonction $f \in L_1(\mathbb{R})$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(ru)\, r^{n-1}\, d\tilde{\sigma}(u)\, dr.$$

*On note $\sigma$ la mesure de probabilité correspondante sur la sphère $S^{n-1}$ :*

$$\sigma := \frac{1}{\tilde{\sigma}(S^{n-1})}\,\tilde{\sigma}\,.$$

*Enfin on pose*

$$v_n = |B_2^n|$$

*le volume de la boule (euclidienne) de rayon 1 centrée en 0.*

1. *Montrer que pour toute fonction continue intégrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = n v_n \int_0^{+\infty} \left( \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1}\, d\sigma(\theta) \right) dr.$$

   *En déduire, en prenant $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ que*

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

2. *Montrer que, lorsque $n \to \infty$ on a*

$$v_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \sqrt{\frac{2\pi e}{n}} \right)^n \qquad et \qquad v_n^{1/n} \sim \sqrt{\frac{2\pi e}{n}}.$$

   On voit donc que le volume $v_n$ est très petit. Pour avoir une boule de volume 1, il faut prendre un rayon de l'ordre de $\sqrt{n}$. Plus précisémment, si $r_n > 0$ est choisit tel que $|r_n B_2^n| = 1$, on a $r_n \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$ ; on préfère parfois dire qu'il existe une constante numérique $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{c} \leq \frac{r_n}{\sqrt{n}} \leq c.$$

   On peut aussi dire qu'il existe une constante numérique $C > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{C} \leq |\sqrt{n} B_2^n|^{1/n} \leq C.$$

3. *On note $B_n$ la boule euclidienne (centrée en 0) de volume 1 : $B_n = r_n B_2^n$. Fixons une direction quelconque $\theta \in \mathbb{R}^n$ ($|\theta| = 1$) et considérons la fonction section dans la direction $\theta$,*

$$g_n(t) := |B_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot \theta = t\}|, \qquad \forall t \in [-r_n, r_n].$$

   *Montrer que, pour $t$ fixé on a, lorsque $n \to \infty$*

$$g_n(t) \sim \sqrt{e}\, e^{-\pi e t^2}.$$

   La fonction section est donc presque Gaussienne ; on peut d'ailleurs être plus précis dans la quantification. Il s'agit d'un phénomène très étudié dans le cas des ensembles convexes généraux et connu sous le nom de « Théorème de la Limite Centrale pour les corps convexes ». Ce qui est surprenant, c'est qu'on tende bien vers une distribution donnée (et donc que la variance de $g_n$ soit bornée indépendamment de $n$). Bien que la boule ait un rayon tendant vers l'infini, l'intégrale de $g_n$ s'approche par l'intégrale sur un segment de taille fixée. Plus précisément :

4. *Montrer que pour $n$ assez grand on a*

$$\left| B_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\} \right| \geq \frac{96}{100}.$$

Étonnant, non ? (vu que $B_n$ a un rayon de l'ordre de $\sqrt{n}$). Ce qui est encore plus étonnant, c'est qu'on peut montrer facilement que « presque toute » la mesure de $B_n$ se trouve près du bord de $B_n$. Les phénomènes en grande dimension prennent notre intuition en défaut.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t$. Cela equivaut à dire que $f = e^{-\varphi}$ avec $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe.

On dit que $\mu$ est une mesure à densité log-concave si

$$d\mu(x) = e^{-\varphi(x)}\, dx$$

avec $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe.

Example

1) La mesure de Lebesgue ($\varphi$ = constante)

2) La mesure de Lebesgue restreinte à un convexe

$$d\mu(x) = 1_K(x)\, dx \qquad K \text{ convexe}$$

$$1_K = e^{-1_K^\infty} \qquad 1_K^\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

3) La mesure gaussienne (standard)

$$d\gamma_n(x) = \frac{e^{-|x|^2/2}}{(2\pi)^{n/2}}\, dx$$

On a vu le résultat suivant :

<u>théorème</u> | Soit $\mu$ une mesure à densité log-concave. Alors pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ on a

$$\mu((1-t)A + tB) \geq \mu(A)^{1-t} \mu(B)^t$$

(Bis) <u>Démonstration</u> : On applique l'inégalité de Prékopa-Leindler, si $d\mu = e^{-\varphi} dx$ avec $f(x) = 1_A(x) e^{-\varphi(x)}$ $g(y) = 1_B(y) e^{-\varphi(y)}$

et $h(z) = 1_{(1-t)A+tB}(z)\, e^{-\varphi(z)}$,

qui vérifie bien l'hypothèse voulue. ☒

Lorsqu'on travaille avec le cas particulier d'ensembles convexes, on peut avoir une information supplémentaire.

théorème : Soit $\mu$ une mesure à densité log-concave et $A, B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles <u>convexes</u>. Alors la fonction

$$t \longrightarrow \mu((1-t)A + tB)$$

est log-concave sur $[0,1]$

<u>Demo</u> : On remarque que si $A$ et $B$ sont convexes, alors pour $t_0, t_1 \in [0,1]$ et $s \in [0,1]$

$$\Big(1 - \big((1-s)t_0 + st_1\big)\Big) A + \big((1-s)t_0 + st_1\big) B$$

$$\supset (1-s)\left[(1-t_0)A + t_0 B\right] + s\left[(1-t_1)A + t_1 B\right]$$

☒

En fait, on aurait pu énoncer avant la forme fonctionnelle suivante

Théorème : Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction log-concave. Alors la fonction $t \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} F(t,x)\, dx$ est log-concave sur $\mathbb{R}$

Demonstration : On applique l'inégalité de Prékopa-Leindler à $f = F(s_0,\cdot)$ $g = F(s_1,\cdot)$ et
$F((1-t)s_0 + t s_1), \cdot)$ $\square$

On en déduit la forme géométrique en introduisant
$$K = \bigcup_{t\in[0,1]} \{t\} \times \big((1-t)A + tB\big) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$
$$\sim \operatorname{conv}\left[\{0\}\times A,\ \{1\}\times B\right]$$
et $F(t,x) = 1_K(t,x)\, e^{-\varphi(x)}$

On voit ici qu'un exemple typique de fonction log-concave est donnée par les sections hyperplans d'un convexe.

~~et donc (1.5).~~

Une conséquence classique de l'inégalité de Brunn-Minkowski concerne les sections des corps convexes. Tout d'abord, rappelons que tout sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbb{R}^n$ est muni naturellement de la structure euclidienne induite. Sur $E$, on dispose donc d'une mesure de Lebesgue et le théorème de Fubini nous dit que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est le produit de la mesure de Lebesgue sur $E$ et de la mesure de Lebesgue sur $E^\perp$ : pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (ou mesurable positive) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{y\in E^\perp} dy \left( \int_{x\in E} f(x+y)\, dx. \right).$$

Tout cela est facile à comprendre en prenant une base orthonormée de $E$ complétée par une base orthonormée de $E^\perp$.

Étant donné un ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}^n$ et un vecteur unité $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| = 1$ (on dit que $\theta$ est une *direction*), on peut considérer la fonction sections (hyperplanes) dans la direction $\theta$ qui est définie par,

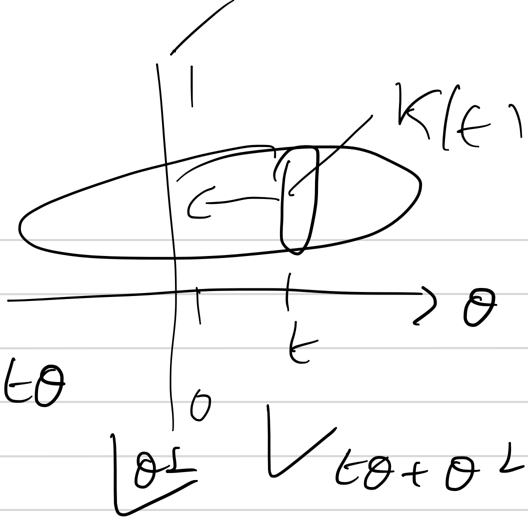
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{A,\theta}(t) := \left| A \cap \left(t\theta + \theta^\perp\right) \right| = \left| (A - t\theta) \cap \theta^\perp \right|. \tag{1.6}$$

Noter que la mesure considérée est donc la mesure de Lebesgue $n-1$ dimensionnelle (dans l'hyperplan $\theta^\perp$). Le théorème de Fubini donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_{A,\theta}(t)\, dt = |A|.$$

**Proposition.** — *Soit $K$ un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et $\theta$ une direction. Alors la fonction section $f_{K,\theta}$ définie par* (1.6) *est telle que $f_{K,\theta}^{\frac{1}{n-1}}$ est concave sur son support. En particulier,* $\log f_{K,\theta}$ *est concave.*

Demo Si on note




$$K(t) = K \cap \{t\theta + \theta^\perp\} - t\theta$$

$$= (K - t\theta) \cap \theta^\perp \subset \mathbb{R}^{n-1} \simeq \theta^\perp$$

Alors

$$K((1-s)t_0 + s t_1) \supset (1-s) K(t_0) + s K(t_1)$$

et on applique (BM) en dim $(n-1)$ ∎

Conséquence classique :

***Exercice* (Maximalité des sections centrales d'un corps convexe symétrique)**
*Soit $K$ un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et $\theta$ une direction. Montrer que parmi toutes les sections (affines) parallèles à $\theta^\perp$, celle passant par l'origine a un volume ($(n-1)$–dimensionnel) maximal.*

La convexité entraîne une certaine rigidité. Un corps convexe symétrique de volume 1, qui a une grande section centrale $K \cap \theta^\perp$ ne peut pas s'étendre beaucoup dans la direction $\theta$.

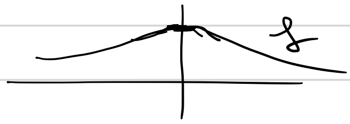
Théorème Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique de volume 1.
Pour toute direction $\theta \in S^{n-1}$ on a

$$\frac{1}{C} \leq |K \cap \theta^\perp|_{n-1} \left( \int_K (x \cdot \theta)^2 \, dx \right)^{1/2} \leq C$$

où $C$ est une constante numérique

"Constante numérique" veut dire que c'est une constante universelle, indépendante de $n$, $K$, etc. On pourrait écrire "$\exists C > 0$ tq $\forall n, \forall K \subset \mathbb{R}^n$" mais en plus, on pourrait donner sa valeur si on était un peu moins paresseux (ici $C = \sqrt{12}$ convient).

## Démonstration du théorème




La fonction $f(t) = |K \cap \{t\theta + \theta^{\perp}\}|_{n-1}$ est log-concave sur $\mathbb{R}$, et paire. Par Fubini on a $1 = |K| = \int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_K (x\cdot\theta)^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,dt$. Par ailleurs $f(0) = |K \cap \theta^{\perp}|_{n-1}$.

**Propriété** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction log-concave paire avec $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Alors

$\Rightarrow$ théorème

$$\frac{1}{12} \leq f(0)^2 \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,dt \leq \frac{3}{2}$$

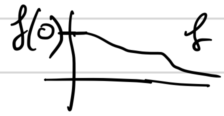
Pour établir cette propriété, on commence par le sens "facile" (Hölder)

**Lemme 1** Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. Alors la fonction

$$p \longrightarrow \left( \frac{p+1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^+} t^p f(t)\,dt \right)^{1/p+1}$$

est croissante sur $]-1, +\infty[$.

**Démo** : on introduit "l'inverse" de $f$




$$h(s) = \sup\{t \geq 0 \ ; \ f(t) \geq s\}.$$

Alors
$$\int_0^{\infty} t^p f(t)\,dt = \int_0^{\infty} t^p \left( \int_0^{f(t)} ds \right) dt$$
Fubini
$$= \int_0^{f(0)} \Big( \int_{\underbrace{\{f(t) \geq s\}}_{= \{t \leq h(s)\} \text{ "p.p."}}} t^p\,dt \Big)\, ds$$

$$= \int_0^{f(0)} h(s)^{p+1} \frac{ds}{p+1}$$

Donc
$$\left( \frac{p+1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^+} t^p f(t)\,dt \right)^{1/p+1} = \left( \frac{1}{f(0)} \int_0^{f(0)} h^{p+1} \right)^{1/p+1}$$

qui est croissante $\uparrow$ en $p$ sur $]-1, +\infty[$ par Jensen ou Hölder. $\boxtimes$

Il faut maintenant une inégalité "inverse Hölder".

<u>Lemme</u> Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ log-concave (avec $0 < \int f < +\infty$) ayant son max en $0$ (décroissante).

Alors la fonction

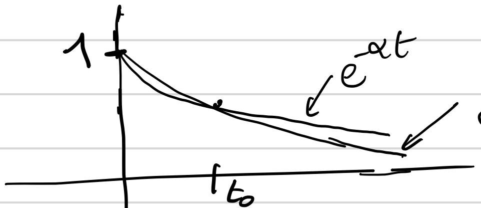
$$p \longmapsto G(p) := \left( \frac{1}{f(0)\,\Gamma(p+1)} \int_{\mathbb{R}^+} t^p f(t)\,dt \right)^{1/(p+1)}$$

est décroissante sur $[0, +\infty[$

<u>Démo</u>. OPS $f(0) = 1$. Pour $p \geq 0$, on voit que si on note $\alpha = \frac{1}{G(p)}$ on a

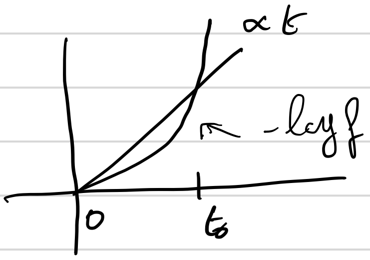
$$\int_0^\infty t^p e^{-\alpha t}\,dt = \int_0^\infty t^p f(t)\,dt \qquad (*)$$

Les fonctions $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto f(t)$ sont tq elles




la différence ne change de signe qu'une fois.

ce qui se voit mieux sur les fcts convexes

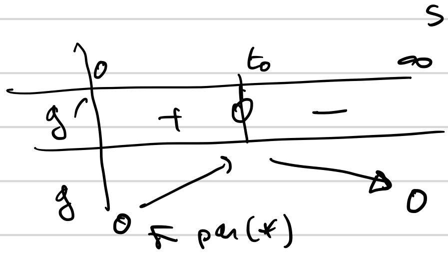



(sauf si elles sont égales)

(elles doivent se croiser par $(*)$ et on voit qu'elles ne peuvent se croiser qu'en un point.)

Ainsi, la fonction $g(s) = \int_s^\infty t^p \left(e^{-\alpha t} - f(t)\right) dt$

vérifie




Donc $g \geq 0$

Soit encore : $\forall s \geq 0$ ; $\displaystyle\int_s^\infty t^p e^{-\alpha t}\,dt \geq \int_s^\infty t^p f(t)\,dt$

On va conclure par IPP :

Soit $q \geq p$. On a

$$\int_0^\infty t^q f(t)\,dt = \int_0^\infty t^{q-p}\, t^p f(t)\,dt$$

$$\overset{IPP}{=} (q-p)\int_0^\infty t^{q-p-1}\left(\int_t^\infty t^p f(t)\,dt\right)dt$$

$$\leq (q-p)\int_0^\infty t^{q-p-1}\left(\int_t^\infty t^p e^{-\alpha t}\,dt\right)dt$$

$$\overset{IPP}{=} \int_0^\infty t^q e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\alpha^{q+1}}\,\Gamma(q+1)$$

ce qui devrait donner que $G(q) \leq G(p)$ $\square$

Rq : Afin de justifier les calculs ci-dessus, on peut remarquer que si $f$ est log-concave (sur $\mathbb{R}^+$) avec $0 < \int_{\mathbb{R}^+} f < +\infty$, alors
$\exists a, b > 0$ tq $0 \leq f(t) \leq a e^{-bt}$

En effet, si on écrit $f(t) = e^{-\varphi(t)}$, $\varphi$ est une fonction convexe qui n'est pas $\equiv +\infty$ et pas constante.
Donc il existe $A \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ tq $\varphi(x) \geq bx + A$

Pour obtenir la proposition, on utilise les lemme ci-dessus en comparant

$$p = 2 \text{ et } p = 0.$$

Lemme 1 $\Rightarrow$ $\displaystyle\left(\frac{3}{f(0)}\int_0^\infty t^2 f(t)\,dt\right)^{1/3} \geq \frac{1}{f(0)}\underbrace{\int_0^\infty f}_{=\frac{1}{2}}$

soit $\displaystyle f(0)^2 \int_0^\infty t^2 f(t) \geq \frac{1}{24}$

Lemme 2 $\Rightarrow$ $\displaystyle f(0)^2 \int_0^\infty t^2 f(t) \leq \frac{3}{4}$ $\Big)$ $\Rightarrow$ PROP.

$\square$