Lemme de Dvoretzky - Rogers

Exercice partie 4.7

1) et 2)

L'ensemble $\mathcal{A} = \{ u \in GL_n \,;\, \|u\|_{\ell_2^n \to E} \leq 1 \}$

un compact (de GL_n) donc la fonction continue $u \to |\det u|$ y atteint son sup.

On remarque que, par définition

$$\|u\|_{\ell_2^n \to E} \leq 1 \iff u(B_2^n) \subset B_E = K$$

De plus, $|\det u| = c_n \, \mathrm{vol}(u(B_2^n))$ avec $c_n = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_2^n)}$

Donc, si $u_0 = \arg\sup \{ |\det u| \,;\, u \in \mathcal{A} \}$

on a que $u_0 B_2^n$ est un ellipsoïde de volume maximal parmi ceux inclus dans K.

Et donc, sur $u_0^{-2} K$, la boule B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximal parmi ceux inclus dans $u_0^{-2} K$.

3) On suppose que K est en position de John

Pour v donné, on considère :

$$u = Id + \frac{\varepsilon}{\|v\|_{\ell_2^n \to E_K}} v \qquad (\varepsilon \text{ petit}) \quad \varepsilon > 0$$

de sorte que $u \in GL_n(\mathbb{R})$

De plus $\|u(x)\|_K \leq 1 + \frac{\varepsilon \|v(x)\|_K}{\|v\|_{\ell_2^n \to K}}$

$\leq 1 + \varepsilon$

Donc $\frac{1}{1+\varepsilon} u \in \mathcal{A} = \{ M \in GL_n, M B_2^n \subset K \}$

Donc $\det\left(\frac{1}{1+\varepsilon} u\right) \leq \det(Id) = 1$

Soit encore $\det{}^{1/n} u \leq 1 + \varepsilon$ pour tout ε petit $\varepsilon > 0$

Or $\det \det{}^{1/n} u = \det{}^{1/n}\left(Id + \varepsilon \frac{v}{\|v\|_{\ell_2^n \to E_K}}\right)$

$= 1 + \varepsilon \frac{1}{n} \mathrm{tr}\left(\frac{v}{\|v\|_{\ell_2^n \to E_K}}\right) + o(\varepsilon)$

Donc $\boxed{\frac{1}{n} \mathrm{tr}\left(\frac{v}{\|v\|_{\ell_2^n \to E_K}}\right) \leq 1}$

Si P est un projecteur orthogonal sur $F^\perp$ de dimension $n-i$, on a

$$\operatorname{tr} P = n-i$$

Donc $$\|P\|_{\ell_2^n \to E_K} \geq \frac{n-i}{n}$$

4) On procède par récurrence (voyu'à n)

Si B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximal dans K, il faut que B_2^n touche le bord de K. Donc $\exists\, w_1 \in \partial K \cap \partial B_2^n$

Alors $$\|w_1\|_K = 1 = \frac{n-1+1}{n}$$

et $$\|w_1\|_{\ell_2^n} = 1$$

Supposons avoir construit $w_1, \dots, w_i$ $\quad i \in [\![1, n-1]\!]$

Soit P la projection $\perp$ sur $F^\perp$ avec $F = \operatorname{vect}(w_1, \dots, w_i)$

Alors $$\|P\|_{\ell_2^n \to E_K} \geq \frac{n-i}{n}$$

Cela implique qu'il $\exists\, \widetilde{w_{i+1}} \in \mathbb{R}^n$ tq $\|\widetilde{w_{i+1}}\|_{\ell_2^n} = 1$

et $\|P\tilde{w}_{i+1}\|_K \geq \frac{n-i}{n} > 0$

Poser $w_{i+1} = \frac{1}{\|P\tilde{w}_{i+1}\|_{\ell_2^n}} P\tilde{w}_{i+1}$

Alors $(w_1, \dots, w_i, w_{i+1})$ est une famille orthonormée

et $\|w_{i+1}\|_K = \frac{\|P\tilde{w}_{i+1}\|_K}{\|P\tilde{w}_{i+1}\|_{\ell_2^n}} \geq \|P\tilde{w}_{i+1}\|_K \geq \frac{n-i}{n}$

↗ un projecteur ⊥ diminue la norme euclidienne

Pour la version vectorielle $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ si je veux.

$B_E = \{\|\cdot\| \leq 1\}$

Soit $u \in GL_n$ tq $u^{-1}B_E$ soit en position de John

et $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m$ une famille orthonormée telle que $\|\tilde{w}_i\|_{u^{-1}B_E} \geq \frac{1}{2}$

On pose $w_i = u\tilde{w}_i$, $i = 1, \dots, m$

On rappelle que $\|x\|_{u^{-1}B_E} = \|ux\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

En particulier :

* $\|ux\| \leq \|x\|_{\ell_2^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(car $B_2^n \subset u^{-1}B_E$)

* $\|w_i\| \geq \frac{1}{2} \quad i = 1, \dots, m$

et $\left\| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right\| = \left\| u\left(\sum_{i=1}^m a_i \tilde{w}_i \right) \right\|$

$\leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i \tilde{w}_i \right\|_{\ell_2^n}$

$= \|a\|_{\ell_2^m}$

5) (a) Comme la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par

$x \longrightarrow (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$

on a

$$\int \|u\| \, d\gamma_n(x) = \int \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i e_i \right\| d\gamma_n$$

pour tout choix de $\varepsilon_i = \pm 1$

(b) Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des v.a. de Bernoulli indép.

$$\mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\| x_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \right\| + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\| -x_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \right\|$$

$$= \mathbb{E}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left\| x_1 e_1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \right\| + \frac{1}{2}\left\| x_1 e_1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \right\|}_{\geq \|x_1 e_1\|} \right]$$

par convexité de la norme $\|\cdot\|$

Ceci est vrai pour toutes les coordonnées.

6) Soit $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $w_1, \dots, w_n$ base orthonormée adaptée avec $\|w_i\|_K \geq \frac{1}{2}$ $\forall i \leq m$.

On suppose $n \geq 2$.

Par la question précédente, avec la bonne base $w_1, \dots, w_n$

$$\int \|x\| \, d\gamma_n \geq \int \max_{i \leq n} \|x_i w_i\| \, d\gamma_n(x)$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} \max_{i \leq m} \|x_i w_i\| \, d\gamma_n(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \max_{i \leq m} \|x_i w_i\| \, d\gamma_m(x)$$

$$\geq \frac{1}{2} \int \max_{i \leq m} |x_i| \, d\sigma_m(x)$$

$$\geq \frac{c}{2} \sqrt{\log(m)}$$

$$\geq \tilde{c} \sqrt{\log(n)}$$

Comme $\|\cdot\| \leq |\cdot|$ $\quad (B_2^n \subset K)$

on a bien

$$k(K) \geq c \log(n)$$ pour K en position de John.

□