Convexité en grande dimension I

TD 1 : polarité, position de John, distance de Banach–Mazur

Notations du chapitre 1. K et L désignent des corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_K$ la jauge de K, h_K sa fonction d'appui, K° son polaire, $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, $u \otimes u$ est l'application $x \mapsto \langle x, u\rangle u$. Les ε_i sont des signes aléatoires indépendants et uniformes sur $\{-1, 1\}$.

Exercice 1 — Hahn–Banach par le théorème de projection. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $|\cdot|$. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et P_K la projectionse sur K.

1. Montrer que P_K est 1-Lipschitz, donc continue.
2. Montrer que si $x \notin K$ et $v = (x - P_K(x))/|x - P_K(x)|$, alors
$$\sup_{y\in K} \langle y, v\rangle = \langle P_K(x), v\rangle.$$
3. Soit $p \notin K$. En déduire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, tel que
$$\sup_{y\in K} \langle y, v\rangle < \langle p, v\rangle,$$
c'est-à-dire qu'un hyperplan affine sépare strictement p et K.
4. Soit $p \in \partial K = K \setminus \operatorname{int} K$.
   (a) Rappeler pourquoi on peut trouver une suite (x_k) avec $x_k \notin K$ et $x_k \to p$.
   (b) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, tel que
$$\sup_{y\in K} \langle y, v\rangle = \langle p, v\rangle.$$
   (c) Interpréter ce résultat.
5. *Applications.*
   (a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue (c'est automatique) et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq \langle y_0, x - x_0\rangle + f(x_0).$$
   (b) Étant donnée une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, on identifie le dual de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ via le produit scalaire, où la norme duale est donc définie par
$$\|y\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} \langle x, y\rangle.$$
   Montrer que $(\|\cdot\|_*)_* = \|\cdot\|$.

Exercice 2 — Jauge d'un convexe ; corps convexes symétriques et normes. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe tel que $0 \in \operatorname{int} C$. Sa *jauge* (ou fonctionnelle de Minkowski) est
$$\|x\|_C = \inf\{t > 0 : \ x \in tC\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_C$ est à valeurs finies, positivement homogène et sous-additive, et qu'il existe $c > 0$ tel que $\|x\|_C \leq c|x|$. En déduire que $\|\cdot\|_C$ est convexe et c-lipschitzienne pour $|\cdot|$.
2. Montrer que $\operatorname{int} C = \{\|\cdot\|_C < 1\}$ et $\overline{C} = \{\|\cdot\|_C \leq 1\}$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_C$ est une norme si et seulement si $\overline{C}$ est borné et symétrique.

Exercice 3 — Réciproque du théorème de John (K. Ball). On suppose $B_2^n \subseteq K$ et qu'il existe des points de contact $u_1, \dots, u_m \in \partial K \cap S^{n-1}$ et des réels $c_1, \dots, c_m > 0$ tels que $\sum_i c_i\, u_i \otimes u_i = I_n$.

1. Soit $\mathcal{E} = TB_2^n \subseteq K$, avec T symétrique définie positive. Montrer que $|Tu_i| \leq 1$ pour tout i. *On pourra estimer $\langle Tu_i, z\rangle$ pour $z \in B_2^n$.*
2. En calculant $\sum_i c_i \langle Tu_i, u_i\rangle$, montrer que $\operatorname{tr} T \leq n$, puis que $|\mathcal{E}| \leq |B_2^n|$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{E} = B_2^n$.
3. Montrer que K est en position de John.

Exercice 4 — Polarité et distance de Banach–Mazur.

1. Soit $1 \leq p \leq \infty$ et q l'exposant conjugué. Montrer que $(B_p^n)^\circ = B_q^n$.
2. Montrer que $(TK)^\circ = T^{-*}K^\circ$ pour $T \in \mathrm{GL}_n$.
3. Montrer que $\operatorname{conv}(K \cup L)^\circ = K^\circ \cap L^\circ$ et $(K \cap L)^\circ = \operatorname{conv}(K^\circ \cup L^\circ)$.
4. En utilisant 2 et le théorème bipolaire (sans passer par les adjoints), montrer que $d_{\mathrm{BM}}(K^\circ, L^\circ) = d_{\mathrm{BM}}(K, L)$.
5. Montrer que $K = K^\circ$ si et seulement si $K = B_2^n$.

Exercice 5 — Lemme d'Auerbach. Soit $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espace normé de boule unité K, et $\det$ le déterminant dans la base canonique.

1. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ qui maximisent $|\det(x_1, \dots, x_n)|$, et que ce maximum est strictement positif.
2. Pour $1 \leq i \leq n$, on considère x_i^* la forme linéaire
$$x_i^*(y) = \det(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) / \det(x_1, \dots, x_n).$$
Montrer que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, que $\|x_i^*\|_{X^*} = 1$ et que $\|x_i\| = 1$.
3. En déduire que pour tous réels a_i,
$$\max_i |a_i| \leq \Big\| \sum_i a_i\, x_i \Big\| \leq \sum_i |a_i|,$$
puis que $d_{\mathrm{BM}}(X, \ell_1^n) \leq n$ et $d_{\mathrm{BM}}(X, \ell_\infty^n) \leq n$.
4. Comparer avec la borne que l'on déduit du théorème de John.

Exercice 6 — Décompositions de John explicites ; ellipsoïde de Löwner du cube.

1. Montrer que $B_2^n \subseteq B_\infty^n$, déterminer les points de contact et en déduire, avec l'exercice 3, que B_∞^n est en position de John.
2. Montrer que $B_2^n \subseteq \sqrt{n}\, B_1^n$ et que les points de contact sont les $\varepsilon/\sqrt{n}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$. Calculer $\sum_\varepsilon \varepsilon \otimes \varepsilon$ et en déduire une décomposition de John de $\sqrt{n}\, B_1^n$. Comparer le nombre de points de contact à la borne $m \leq n(n+1)/2$ du cours.
3. Plus généralement, montrer que B_p^n est en position de John si $2 \leq p \leq \infty$, et $n^{1/p - 1/2} B_p^n$ si $1 \leq p \leq 2$.
4. Déduire de 2 et du corollaire sur l'ellipsoïde de Löwner que le plus petit ellipsoïde centré contenant B_∞^n est $\sqrt{n}\, B_2^n$.
5. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde centré tel que $\mathcal{E} \subseteq B_\infty^n \subseteq t\,\mathcal{E}$. En comparant les volumes de $\mathcal{E}$ et de $t\mathcal{E}$ à ceux de B_2^n et de $\sqrt{n}\, B_2^n$, montrer que $t \geq \sqrt{n}$. Retrouver $d_{\mathrm{BM}}(\ell_\infty^n, \ell_2^n) = \sqrt{n}$ sans moyenne sur les signes.

Exercice 7 — Distance de ℓ_p^n à ℓ_2^n.

1. Montrer que $d_{\mathrm{BM}}(\ell_p^n, \ell_2^n) \le n^{|1/p-1/2|}$ pour $1 \le p \le \infty$.
2. Soit $2 \le p \le \infty$ et $T : \ell_p^n \to \ell_2^n$ un isomorphisme. Montrer que $|Te_i| \ge \|T^{-1}\|^{-1}$ pour tout i, puis, en calculant $\mathbb{E}_\varepsilon |T(\sum_i \varepsilon_i e_i)|^2$, que $\|T\|\,\|T^{-1}\| \ge n^{1/2-1/p}$.
3. En déduire que $d_{\mathrm{BM}}(\ell_p^n, \ell_2^n) = n^{|1/p-1/2|}$ pour tout $1 \le p \le \infty$.

Exercice 8 — Lemme de Dvoretzky–Rogers, sans la décomposition de John. On suppose K en position de John, et l'on n'utilise que la maximalité du volume de B_2^n. Pour une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$, on note $\|T\| = \max_{|x|\le 1} \|Tx\|_K$ sa norme de ℓ_2^n dans X_K.

1. Montrer que $|\det T| \le \|T\|^n$ pour toute application linéaire T.
2. Montrer que $\operatorname{tr} v \le n\,\|v\|$ pour toute application linéaire v.
3. Soit F un sous-espace de dimension d et P_F la projection orthogonale sur F. Montrer que $\|P_F\| \ge d/n$, et en déduire qu'il existe $y \in F$ tel que $|y| = 1$ et $\|y\|_K \ge d/n$.
4. Construire par récurrence une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ telle que
$$\frac{n-i+1}{n} \;\le\; \|x_i\|_K \;\le\; 1 \qquad (1 \le i \le n).$$
En particulier $\|x_i\|_K \ge 1/2$ pour $i \le n/2$.
5. Question indépendante. Montrer que pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on a $\mathbb{E}_\varepsilon \|\sum_i \varepsilon_i\, v_i\| \ge \max_i \|v_i\|$.
6. Soit σ la probabilité uniforme sur S^{n-1} et $M(K) = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K \, d\sigma(\theta)$. Montrer que
$$M(K) \;\ge\; \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \max_{i \le n/2} |\theta_i| \, d\sigma(\theta).$$
On verra au chapitre 4 que le membre de droite est minoré par $c\sqrt{\log n/n}$: c'est l'étape qui mène au théorème de Dvoretzky pour un espace normé quelconque.

Exercice 9 — Lemme de Dvoretzky–Rogers, forme complète. On suppose K en position de John, avec une décomposition $I_n = \sum_j c_j\, u_j \otimes u_j$ comme dans le cours. On améliore la minoration d/n de l'exercice 8 en $\sqrt{d/n}$.

1. Montrer que $|\langle y, u_j\rangle| \le \|y\|_K \le |y|$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout j.
2. Soit F un sous-espace de dimension d et P_F la projection orthogonale sur F. Montrer que $\sum_j c_j |P_F u_j|^2 = d$, et en déduire qu'il existe j tel que $|P_F u_j|^2 \ge d/n$, puis qu'il existe $y \in F$ tel que $|y| = 1$ et $\|y\|_K \ge \sqrt{d/n}$.
3. Construire par récurrence une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ telle que
$$\sqrt{\frac{n-i+1}{n}} \;\le\; \|x_i\|_K \;\le\; 1 \qquad (1 \le i \le n).$$
En particulier $\|x_i\|_K \ge 1/\sqrt{2}$ pour $i \le n/2$, et la constante $1/2$ de l'exercice 8, question 6, peut être remplacée par $1/\sqrt{2}$.
4. *Optimalité.* Soit $n = 2^k$ et H_k la matrice de Hadamard–Sylvester, définie par $H_0 = (1)$ et $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$. Montrer que les colonnes $h_1, \dots, h_n$ de H_k sont orthogonales et de norme $\sqrt{n}$. Soit F engendré par $h_1, \dots, h_d$. Montrer que $\|y\|_\infty \le \sqrt{d/n}$ pour tout $y \in F$ tel que $|y| = 1$. En déduire que la minoration $\sqrt{d/n}$ de la question 2 ne peut pas être améliorée, même pour $K = B_\infty^n$ (qui est en position de John par l'exercice 6).

Exercice 10 — Lemme de Lewis. Soit α une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et α^* sa norme duale pour la trace :

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(uv) :\ \alpha(u) \leq 1\} \qquad (v \in M_n(\mathbb{R})).$$

C'est une norme. Ce n'est pas exactement la norme duale usuelle de α pour le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$ de $M_n(\mathbb{R})$, qui est $v \mapsto \alpha^*(v^*)$, mais cela ne change rien, la transposition étant un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ (de plus isométrique pour la structure euclidienne) : en particulier, avec cette définition, on a encore $\alpha^{**} = \alpha$. Pour $y, z \in \mathbb{R}^n$, on note $y \otimes z$ l'application $x \mapsto \langle x, z\rangle\, y$.

1. *Un exemple : la norme nucléaire.* Dans cette question, α est la norme d'opérateur $\|u\|_{op} = \max_{|x|\leq 1} |ux|$. Soit $v = \sum_i s_i\, a_i \otimes b_i$ une décomposition en valeurs singulières de v ($s_i \geq 0$, (a_i) et (b_i) bases orthonormées). Montrer que $\alpha^*(v) = \sum_i s_i = \mathrm{tr}(\sqrt{v^*v})$, et que la boule unité de α^* est l'enveloppe convexe des $y \otimes z$, où $|y| \leq 1$ et $|z| \leq 1$.
2. Montrer que det atteint sur $\{\alpha \leq 1\}$ un maximum strictement positif, et que tout point de maximum u vérifie $\alpha(u) = 1$.
3. Soit u un point de maximum. Montrer que $\mathrm{tr}(u^{-1}v) \leq n\,\alpha(v)$ pour tout $v \in M_n(\mathbb{R})$, puis que $\alpha(u)\,\alpha^*(u^{-1}) = n$.
4. *Auerbach.* Soit $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ de boule unité K et $\alpha(u) = \max_i \|ue_i\|$. Pour $v \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\ell_i(v) \in X^*$ la forme $y \mapsto (vy)_i$. Montrer que $\alpha^*(v) = \sum_i \|\ell_i(v)\|_{X^*}$. Soit u un point de maximum et $x_i = ue_i$: vérifier que $(x_1, \ldots, x_n)$ est comme dans la question 1 de l'exercice 5, que $\ell_i(u^{-1}) = x_i^*$, et retrouver la question 2 de cet exercice.
5. *John.* Soit K en position de John et $\alpha(u) = \max_{|x|\leq 1} \|ux\|_K$. Montrer que I_n est un point de maximum, et retrouver les questions 1 et 2 de l'exercice 8.
6. Dans le cadre de la question 5, soit $Q \subseteq M_n(\mathbb{R})$ l'enveloppe convexe des $y \otimes z$, où $|y| \leq 1$ et $\|z\|_{K^\circ} \leq 1$. Montrer que Q est compact, que $\sup_{w\in Q} \mathrm{tr}(uw) = \alpha(u)$ pour tout u, puis, à l'aide de l'exercice 1, que $Q = \{\alpha^* \leq 1\}$: α^* est la norme nucléaire de X_K dans ℓ_2^n, et la séparation remplace ici la décomposition en valeurs singulières de la question 1. En déduire, à partir de $\alpha^*(I_n) = n$, une décomposition $I_n = \sum_j c_j\, u_j \otimes u_j$ avec $c_j > 0$ et des points de contact u_j : c'est le théorème de John du cours.

Appliqué à la ℓ-norme $\alpha(u) = (\mathbb{E}\|\sum_i g_i ue_i\|_K^2)^{1/2}$, où les g_i sont des gaussiennes standard indépendantes, ce lemme est le point de départ de la ℓ-position, vue plus loin dans le cours.