Feuille 7. Équations différentielles. Quelques solutions

Exercice 5 Soit l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{(1+x)^3} \qquad (E)$$

On cherche les solutions de (E) sur $]-1,+\infty[$ (la même méthode s'appliquera à $]-\infty,-1[$). On considère d'abord l'équation homogène associée

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad (E-H)$$

qui admet, elle, des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui admet donc une *racine double* $r = 1$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène $(E-H)$ est

$$y = \lambda\, e^x + \mu\, x\, e^x, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution générale (E), il faut trouver une solution particulière. On pose $y_0(x) = \frac{e^x}{1+x}$, qui est une fonction deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. Le calcul (à faire !) montre que y_0 est bien une solution de (E). La solution générale de (E) sur $]-1,+\infty[$ est donc

$$y = \frac{e^x}{1+x} + \lambda\, e^x + \mu\, x\, e^x, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6

1. Soit $g(x) = \log\left(\frac{x-2}{x}\right)$. La fonction g est définie sur l'ensemble des réels x tels $\frac{x-2}{x} > 0$, c'est à dire sur l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]2,+\infty[$. Par théorème d'opérations la fonction est continue et dérivable sur son ensemble de définition. On a,

$$\forall x > 2, \qquad g(x) = \log(x-2) - \log(x)$$

(attention, cette égalité est fausse pour $x < 0$). La dérivée de g sur $]2,+\infty[$ vaut

$$g'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}.$$

2. On considère sur $]2,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{x(x-2)}\, y \,+\, 2(x-2) \qquad (E).$$

L'équation homogène associée est $y' = \frac{2}{x(x-2)}\, y$. D'après la question 1., la fonction g est une primitive de $\frac{2}{x(x-2)}$, et donc la solution générale de l'équation homogène est

$$z(x) = \lambda\, e^{g(x)} = \lambda\, \frac{x-2}{x} = \lambda\, z_0(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad z_0(x) := \frac{x-2}{x}.$$

Reste à trouver une solution particulière $y_0(x)$. Pour cela, on cherche y_0 sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) z_0(x).$$

On voit que y_0 est solution si λ est une fonction dérivable vérifiant

$$\lambda'(x) = \frac{2(x-2)}{z_0(x)} = 2x.$$

Ainsi, si l'on choisit $\lambda(x) = x^2$, alors $y_0(x) := x^2\, z_0(x)$ est une solution particulière de (E). La solution générale de (E) sur $]2,+\infty[$ est donc

$$y = x^2\, z_0(x) + \lambda z_0(x) = \frac{(x-2)\big(x^2+\lambda\big)}{x}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$