# Correction de l'interrogation du 11 décembre 2007

**Exercice 1.** Soit $f$ la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{e^{-x} + \frac{x^2}{2}}\right)$.

1. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{-x}+x^2/2 > 0$ car $e^{-x} > 0$. L'ensemble de définition de $f$ est donc $\mathbb{R}^*$.
2. Par théorème d'opérations, la fonction $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Lorsque $x \to 0$ on a

$$e^{-x} + x^2/2 = 1 + (-x) + (-x)^2/2 + (-x)^3/6 + o(x^2) + x^2/2 = 1 - x + x^2 - x^3/6 + o(x^2).$$

En posant

$$u(x) = e^{-x} + x^2/2 - 1 = -x + x^2 - x^3/6 + o(x^2)$$

on a $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ et on peut donc combiner ce DL avec

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

On a

$$u(x)^2 = x^2 - 2x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad u(x)^3 = -x^3 + o(x^3).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{-x} + x^2/2} = \frac{1}{1+u(x)} &= 1 + x + (1-1)x^2 + \Big(-\frac{1}{6} - 2 + 1\Big)x^3 + o(x^3)\\ &= 1 + x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Et donc, finalement, le $DL_2(0)$ de $f$ est

$$f(x) = (-x + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3))/x = -1 + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2).$$

4. Ce DL nous donne en particulier (en utilisant l'ordre 0) que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1.$$

Puisque $f$ a une limite en 0, on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$. La fonction ainsi prolongée $f$ est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$.

5. La fonction $f$ (qui est maintenant continue en 0) admet un DL à l'ordre 1 en 0 donné par

$$f(x) = -1 + o(x) = f(0) + o(x).$$

La fonction $f$ est donc dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

6. Puisque le DL en 0, $f(x) = -1 + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2)$, possède un terme d'ordre 2 strictement positif, on en déduit que le graphe de $f$ reste au dessus de sa tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = -1$ (tangente horizontale).

**Exercice 2.** On remarque que la fonction $f$ est bien définie et continue (sur $\mathbb{R}$ et en particulier au voisinage de 0), avec $f(0) = 1/2$ qui est donc le terme d'ordre 0 du DL. On écrit

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sin(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + u(x)}$$

en posant $u(x) = \dfrac{1}{2}\sin(x)$. Comme $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ on va pouvoir utiliser le $DL$ en 0 suivant :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

On a, lorsque $x \to 0$,

$$u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3) \quad ; \quad u(x)^2 = \frac{1}{4}x^2 + o(x^3) \quad ; \quad u(x)^3 = \frac{1}{8}x^3 + o(x^3).$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + (\frac{1}{12} - \frac{1}{8})x^3 + o(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

**Exercice 3.** On considère la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Puisque $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$ et par théorème d'opérations, la fonction $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (on utilise ici que $t \to \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $1 + x^2$ est a valeurs dans $]0, +\infty[$).
2. On a, en utilisant la formule de dérivation pour la racine, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^{x/2}}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{x\, e^{x/2}}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

   Après simplification on trouve $f'(x) = \dfrac{e^{x/2}(x-1)^2}{2\,(x^2+1)^{3/2}}$.
3. En $-\infty$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$. Par conséquent

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

   Pour $x > 0$ on a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \times \dfrac{e^{x/2}}{x}$ et par croissante comparée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = +\infty$.
   On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

4. La dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et s'annule en 1 (où la fonction admet donc une tangente horizontale). La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.