Correction de l'interrogation du 13 novembre 2007

Exercice 1.

1. Les puissances réelles a^b ($b \in \mathbb{R}$) ne sont définies que pour $a > 0$. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = x^x$ est donc $]0, +\infty[$ et sur cet ensemble la fonction est donnée par
$$f(x) = e^{x \log(x)}$$
La fonction log étant dérivable sur $]0, +\infty[$ on en déduit, par théorème d'opérations sur les fonctions dérivables, que f est dérivable sur son ensemble de définition et que sa dérivée est donnée par
$$f'(x) = (\log(x) + 1)e^{x \log(x)} = (\log(x) + 1)x^x.$$
2. L'ensemble de définition de $f(x) = x \sin(1/x)$ est $\mathbb{R}^*$ et f est dérivable sur cet ensemble (théorème d'opérations), sa dérivée étant donnée par
$$f'(x) = \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) + \Big(x \times \frac{-1}{x^2}\Big)\cos\Big(\frac{1}{x}\Big) = \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x}\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)$$
3. Pour $f(x) = \log(x - 1)$, il s'agit simplement d'une translation de la fonction log. Cette fonction est dérivable sur $D_f =]1, +\infty[$ avec $f'(x) = 1/(x - 1)$.

Exercice 2.

1. On a $D_g = \mathbb{R}$ et, en remarquant que $x^2 - x = x(x - 1)$,
$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 - x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$
2. On a, en revenant à la définition de $f \circ g$,
$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \geq 1 \text{ ou } x^2 \leq 0\} \\ &=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}. \end{aligned}$$
3. La fonction f est dérivable sur D_f privé des points 0 et 1 et sa dérivée vaut
$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}.$$
La fonction $f \circ g$ est donc dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et sa dérivée vaut, sur cet ensemble
$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = \frac{2x(2x^2 - 1)}{2\sqrt{x^4 - x^2}} = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2}}$$

Exercice 3. Soit $f(x) = x \log|x|$.

1. On a $D_f = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x| > 0\} = \mathbb{R}^*$.
2. La fonction $x \to |x|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction log est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc, par théorème d'opérations pour les fonctions dérivables, la fonction f est continue et dérivable sur D_f.
3. On a, lorsque $x \to 0$, par croissances comparées, que $x \log|x| \to 0$. (Pour le voir, on peut distinguer $x > 0$ et $x < 0$, ou bien remarquer que pour x proche de 0, $\big|x \log|x|\big| = -|x| \log|x|$ qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$). On a donc
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$
La fonction f admet donc un prolongement par continuité en 0. En posant $f(0) = 0$ on obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

4. On regarde le taux d'accroissement en 0. On a, pour $x \neq 0$
$$\frac{f(x) - f(0}{x} = \frac{f(x)}{x} = \log|x|.$$
Or, $\log|x| \to -\infty$ lorsque $x \to 0$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 (mais la courbe y admet une tangente verticale).

Exercice 4. Soit $f(x) = xe^{-1/x}$.

1. On a $D_f = \mathbb{R}^*$ et par théorème d'opérations, la fonction f est continue et dérivable sur cet ensemble, et sa dérivée est donnée par
$$f'(x) = e^{-1/x} + x \times \frac{+1}{x^2} e^{-1/x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$
2. On remarque que $u := 1/x \to \pm\infty$ lorsque $x \to 0$.
Limite à gauche en 0. On a $e^{-1/x} \to +\infty$ lorsque $x \to 0^-$ et par croissances comparées $(\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{e^u}{-u} = -\infty)$, on a, lorsque $x \to 0^-$, $\quad f(x) \to -\infty$.
Limite à droite en 0. On a $e^{-1/x} \to 0$ lorsque $x \to 0^+$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
La fonction f n'a pas de limite en 0 : elle a seulement une limite à droite.
3. Puisque $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^+$, on peut prolonger f par continuité à droite en 0. La fonction obtenue en posant $g(x) = f(x)$ pour $x > 0$ et $g(0) = 0$ est alors continue sur $[0, +\infty[$. De plus, le taux d'accroissement en 0^+ est donné, pour $x > 0$, par
$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = e^{-1/x}.$$
Il tend donc vers 0 lorsque $x \to 0^+$. Par conséquent, la fonction g est dérivable (à droite) en 0 avec $g'(0) = 0$.
4. On remarque que $1/x \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$ et donc $e^{-1/x} \to 1$ lorsque $x \to \pm\infty$. En multipliant $e^{-1/x}$ par x, on obtient donc, par théorème d'opérations sur les limites,
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
5. Puisque qu'une exponentielle est toujours positive, on voit que f est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^{-*}$. La dérivée de f est clairement positive sur $\mathbb{R}^+$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle tend vers 0 en 0^+ avec une tangente horizontale en 0^+ (c'est la fonction g de la question précédente). Sur $]-\infty, 0[$, on a, en étudiant le signe de $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ que f est croissante sur $]-\infty, -1]$ et décroissante sur $[-1, 0[$ (en tendant vers $-\infty$ en 0^- et en $-\infty$). En -1, on a $f(-1) = -e$, et c'est le maximum de f sur $]-\infty, 0[$ (la courbe de f y admet une tangente horizontale).

Exercice 5. La fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est définie et continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (par théorème d'opérations). Comme $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$, on a,
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$
La fonction f admet donc un prolongement par continuité en 0. En posant $f(0) = 1$ on obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}$.