Correction de l'examen du 29 janvier 2008

Exercice 1. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x}\big(\cos(x) - e^{-x}\big)$.

1. $D_f = \mathbb{R}^*$ et par théorèmes d'opérations, f est continue et dérivable sur cet ensemble.
2. On a, lorsque $x \to 0$: $\cos(x) - e^{-x} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \big(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\big) = x - x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et donc
$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$
3. Le développement limité précédent (l'ordre 0 suffit) nous dit que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$
et par conséquent, f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on pose donc $f(0) = 1$ et on obtient ainsi une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Cette fonction continue ayant un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et ce développement donne $f'(0) = -1$.
4. La tangente en 0 de la fonction f qui est (maintenant) continue et dérivable en 0 est $y = 1 - x$. Comme le terme d'ordre 2 du DL est positif, le graphe de f est au-dessus de cette tangente **au voisinage de** 0.

Exercice 2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$.

1. On a $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x + 1 \geq 0,\ x + 2 \neq 0\} = [-1, +\infty[$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ en en déduit, par théorèmes d'opérations que f est continue sur D_f et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Par ailleurs, pour $x > 0$ on a
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{x}}$$
(attention, cette écriture n'est valable que si $x > 0$). Par conséquent, lorsque $x \to +\infty$ on a $f(x) \to 0$.
2. On a, pour $x > -1$, $f'(x) = -\frac{x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$. Par conséquent, f est strictement croissante sur $[-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty]$.
3. L'image de ces intervalles s'obtient en utilisant que f est **continue et strictement monotone** là ou il faut. Voir cours.
4. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème des fonctions réciproques, la fonction f est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$, c'est-à-dire que la fonction f restreinte à $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f([0, +\infty[)$, et de plus cette fonction est continue et strictement décroissante sur cet ensemble. On a $f([0, +\infty[) =]\lim_{+\infty} f, f(0)] =]0, \frac{1}{2}]$.
5. De $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{+\infty} f = 0$ on tire que $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim_{y\to 0} f^{-1}(y) = +\infty$.
6. On sait déjà que f^{-1} est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$. La fonction f étant dérivable sur $[0, +\infty[$, on en déduit qeu f^{-1} sera dérivable en tout les $f(x)$ où $f'(x) \neq 0$. Or f' ne s'annule que en 0 et $f(0) = \frac{1}{2}$. Par conséquent, f^{-1} est dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ avec, sur cet ensemble $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exercice 3. On cherche un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \big(1+x\big)^{\cos(x)}$. On peut remarquer qu'au voisinage de 0 on a $1 + x > 0$ et donc que la fonction est bien définie. Justement, pour faire le DL il faut impérativement revenir à la définition

$$f(x) = e^{\cos(x)\,\log(1+x)}.$$

(Cela n'avait aucun sens d'utiliser un DL de $(1 + x)^\alpha$ car la variable est aussi dans la puissance.) On a, lorsque $x \to 0$

$$u(x) := \cos(x)\,\log(1 + x) = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))\,(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Puisque $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, on peut combiner le DL précédent avec celui de $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Après calcul on doit trouver que, lorsque $x \to 0$,

$$f(x) = 1 + x + o(x^2).$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle (linéaire du premier ordre avec second membre continu sur $\mathbb{R}$) :

$$(E) \qquad y' - y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

L'équation homogène associée est

$$(EH) \qquad y' - y = 0$$

dont la solution générale est $y = K\,e^x$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Afin de trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de variation de la constante. On cherche donc une solution de la forme $y_0(x) = K(x)e^x$ avec $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On calcule $y_0' - y_0$ et on constate que y_0 est bien solution de (E) à condition que

$$K'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Par conséquent, la fonction dérivable $y_0(x) = \arctan(x)\,e^x$ est bien une solution de (E). On en déduit que la solution générale de (E) est

$$y = \arctan(x)\,e^x + K\,e^x = (\arctan(x) + K)\,e^x$$

avec $K \in \mathbb{R}$.