Examen du 29 janvier 2008

Exercice 1. (5 points) Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}\big(\cos(x) - e^{-x}\big)$$

1. Donner l'ensemble de définition de f. Sur quel ensemble f est-elle continue et dérivable ?
2. Donner un développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée (**que l'on notera encore** f) est dérivable en 0. Donner, pour ce prolongement, les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Donner la position de la tangente à la courbe de f en 0.

Exercice 2. (8 points) Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f et la régularité de f ? La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$. Donner le sens de variation de f.
3. Déterminer les trois ensembles suivants

$$f\big([-1,0]\big)\,, \quad f\big([\tfrac{1}{2},1[\big)\,, \quad f\big([0,+\infty[\big)\,.$$

4. Montrer que la fonction f possède une fonction réciproque sur $[0,+\infty[$, que l'on notera f^{-1} et dont on donnera l'ensemble de définition.
5. Donner les valeurs (ou les limites) de f^{-1} aux bornes de son ensemble de définition.
6. Dire où la fonction f^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée en fonction de f^{-1}.

Exercice 3. (5 points) Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$f(x) = \big(1+x\big)^{\cos(x)}.$$

Exercice 4. (5 points) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante

$$y' - y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$