

Interrogation du 11 décembre 2007

Exercice 1. (12 pts) Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{e^{-x} + \frac{x^2}{2}} \right)$$

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue et dérivable ?
3. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
Indication : vous devriez trouver, pour $x \rightarrow 0$, $f(x) = -1 + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2)$.
4. Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0.
Dans la suite, on notera encore f la fonction ainsi prolongée en 0.
5. Montrer que f est alors dérivable en 0.
6. Donner l'équation de la tangente en 0 et la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 2. (4 pts) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin(x)}.$$

Exercice 3. (7 pts) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f , et l'ensemble où f est continue et dérivable.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Donner le sens de variation de f et tracer l'allure du graphe de f .