

Interrogation du 13 novembre 2007

Ce devoir est long et son barème sera sur au moins 30 points. Ne cherchez donc pas à tout faire, mais cherchez plutôt à bien faire les exercices que vous choisissez de traiter

Exercice 1. (5 pts) Pour chacune des trois fonction suivantes, déterminer l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée :

$$x \longrightarrow x^x ; \quad x \longrightarrow x \sin(1/x) ; \quad x \longrightarrow \log(x-1).$$

Exercice 2. (5 pts) Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ et $g(x) = x^2$.

1. Quels sont les ensembles de définition de f et g ?
2. Donner l'ensemble de définition de $f \circ g$.
3. Calculer, là où elle définie, la dérivée de $f \circ g$.

Exercice 3. (6 pts) On considère la fonction numérique $f(x) = x \log |x|$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Justifier que la fonction f est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
3. Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en une fonction continue sur \mathbb{R} .
4. Ce prolongement par continuité est-il dérivable en 0 ?

Exercice 4. (11 pts) On considère la fonction $f(x) = xe^{-1/x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f . Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue et dérivable ? Quelle est la dérivée de f ?
2. Etudier les limites à gauche et à droite en 0. La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?
3. Montrer que la fonction $g = f|_{]0, +\infty[}$, c'est-à-dire la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction f , admet un prolongement par continuité à $[0, +\infty[$. Ce prolongement est-il dérivable (à droite) en 0 ?
4. Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f .
5. Donner le sens de variation de f et tracer son graphe.

Exercice 5. (3 pts) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité à \mathbb{R} tout entier.