

Exercices. Feuille 1

Exercice 1. (Injection, surjection). Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2. (Ensembles). Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Pour A et B des parties de E montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

2. Pour C et D des parties de F montrer que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Exercice 3. (QCM). Dans cet exercice, I désigne un intervalle de \mathbb{R} . Répondez par **Vrai ou Faux** aux questions ou aux assertions ci-dessous, en justifiant votre réponse.

1. Si f et g sont définies en $x_0 \in I$, alors $f + g$ est définie en x_0 .
Même question pour $f g$, $\frac{f}{g}$ et $f \circ g$.
2. Si f est définie sur $g(I)$ et g est définie sur I , alors $f \circ g$ est définie sur I .
Réciproque ?
3. Si f est bornée sur $g(I)$ et $f \circ g$ définie sur I , alors $f \circ g$ est bornée sur I .
4. Si f et g sont bornées sur I , alors f/g est bornée sur I .
5. Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ est croissante.
Même question pour $f g$,
Lorsque f est croissante et strictement positive sur I , que peut-on dire de $1/f$?
6. Si g est croissante sur I et f est croissante (resp. décroissante) sur $g(I)$, alors $f \circ g$ est croissante (resp. décroissante) sur I .

Exercice 4. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis donner leur sens de variation (sans calculer la dérivée) et tracer leur graphe.

$$\begin{array}{lll}
 x \longrightarrow (x+1)^2 & x \longrightarrow (x-1)^3 & x \longrightarrow \sqrt{x-2} \\
 x \longrightarrow x^{1/3} & x \longrightarrow \frac{1}{x+1} & x \longrightarrow x^{-1/2} \\
 x \longrightarrow e^{-x} & x \longrightarrow |\log x| & x \longrightarrow \log|x| \\
 x \longrightarrow e^{|x|} & x \longrightarrow \sin^3(x) & x \longrightarrow \cos^2(x)
 \end{array}$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin x \leq x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

Exercice 6. On considère la fonction $f(x) = \log(\log(\log(x)))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les réels x tel que : a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 1$.

Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \cos(3x) = 1/2 ; \quad \sin^2(x) = \cos^2(x) ; \quad \tan^2(x) = \tan(x) ; \\
 \log(x^2 - 1) + 2 \log(2) = \log(4x - 1) ; \quad e^{2x} - 3 = 4e^{-2x} ; \quad 4^x - 12 \times 2^x + 32 = 0
 \end{array}$$