Exercices. Feuille 1 (suite)

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition des fonction suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \;;\quad f_2(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x} \;;\quad f_3(x) = \frac{1}{\log(1+\sin(x))}$$

$$f_4(x) = \log(\cos(x)) \;;\quad f_5(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)(x+1)}.$$

Exercice 2. Donner l'équation de la tangente (si elle existe) au graphe de la fonction :

1. $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 0
2. $g(x) = x + \log(x)$ au point d'abscisse 1
3. $h(x) = e^{x^2}$ au point d'abscisse -1
4. $k(x) = \frac{\sin(x)}{\log(x)}$ au point d'abscisse $\pi/2$

Exercice 3. Déterminer les limites des fonctions suivantes, lorsqu'elles existent :

1. $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 1$ en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$
2. $g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$
3. $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$ en 1
4. $k(x) = \frac{\log(x)^2}{x^5}$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 4. Déterminer les limites des fonctions suivantes, lorsqu'elles existent :

1. $f_1(x) = \frac{x+1+|x-2|}{|3-x|+2x}$ en $-\infty$
2. $f_2(x) = \frac{2e^x-5}{3e^x+4}$ en $+\infty$
3. $f_3(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$ en $+\infty$
4. $f_4(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$
5. $f_5(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$ en $x = 0$

Exercice 5. Partie entière On note E la fonction partie entière définie par

$$E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \;;\; k \leq x\}.$$

1. Vérifier que E est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Que valent $E(3/2)$, $E(-3/2)$, $E(\pi)$, $E(-5)$, $E(6)$?
3. Montrer que pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a
$$E(x) = k \Longleftrightarrow x \in [k, k+1[\ .$$
4. Déterminer, pour $y \in \mathbb{R}$ l'ensemble $E^{-1}(\{y\} = \{x \in \mathbb{R} \;;\; E(x) = y\}$.
5. Tracer le graphe de E.
6. Montrer que E n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour les fonctions f et g suivantes, donner l'ensemble de définition et déterminer $g \circ f$

1. $f(x) = 1 + \log(x^2 - x - 2)$ et $g(x) = e^x$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ et $g(x) = x^2$. (Dans cet exemple, on pose la même question pour $f \circ g$).