Feuille 3. Continuité et dérivabilité

Exercice 1. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2}$ se prolonge par continuité en -2.

Exercice 2. Etudier la continuité à l'origine de la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 3. Montrer que les fonctions

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Etudier la continuité et la dérivabilité en 0.

Exercice 4. Déterminer les nombres réels a, b, c pour que les deux fonctions suivantes soient continues sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} c & \text{si } x < -2 \\ ax+b & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \log x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} (x-1)\,e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 3e^x - c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Les fonctions ainsi construites sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. Soient f et g deux fonctions définies sur cet intervalle. On suppose que g est continue en a, que $g(a) = 0$, et que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq g(x)$. Montrer que f est continue en a.

Exercice 6. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.

1. Donner son ensemble de définition.
2. Etudier le comportement de g au voisinage des points -1, 0 et 1. Peut-elle être prolongée par continuité en certains points ?
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
4. Représenter graphiquement g.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, suivant n, les nombres réels a et b pour que la fonction

$$f(x) = \frac{x^n + ax + b}{x^2 - 1}$$

puisse être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue en 0 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
2. Montrer que f est constante (sur $\mathbb{R}$).

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{1}{6}\,x^3.$$

1. Calculer f', f'' et f'''.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $f'''(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 10.

1. Démontrer qu'une fonction dérivable est continue.
2. Une fonction continue est-elle dérivable ? Justifier votre réponse.
3. Une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est-elle prolongeable par continuité au point 0 ? Justifier.
4. Une fonction constante (respectivement constante par morceaux) est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2(x+1) & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{2x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 12. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$\exp(f(x)), \quad (f(\sin x))^2, \quad \ln|f(x)| \quad \text{et } f\left(\ln|f(x)|\right).$$

Exercice 13. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.

1. Etudier la parité de f et montrer que f se prolonge par continuité en 0. Soit g ce prolongement.
2. Montrer que g est dérivable en 0. Calculer $g'(x)$.
3. La fonction g' est-elle continue en 0 ? Admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Après avoir remarqué que $f(x) \leq 1/|x|$ pour $x \neq 0$, représenter g.
5. Soient φ une fonction dérivable et l un réel, que pensez-vous des assertions suivantes :
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = l \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0.$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0 \implies \exists l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = l.$

Exercice 14. Montrer que les dérivées n-ièmes des fonctions sinus et cosinus sont définies par

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 15. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée :

1) $x \to \log(x^2 - 3x + 2)$; 2) $x \to \dfrac{1}{\cos(x^2)}$; 3)$x \to \left(x(x-2)\right)^{1/4}$; 4) $x \to e^{1/x}$

Exercice 16. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée :

$$1)\ x \to \sqrt{x^2-1}\ ; \qquad 2)\ x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\ ; \qquad 3) x \to x^x\ ; \qquad 4)\ x \to |x|^n\ , n \in \mathbb{N}^*$$

$$5)\ x \to \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ ; \qquad 6)\ x \to \log|\tan(\frac{x}{2})|\ ; \qquad 7)\ x \to \log|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$$

Exercice 17. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle est prolongeable par continuité en 0. (Dans la suite, on notera encore f la fonction ainsi définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. Est-ce que $f'(x)$ a une limite quand $x \to 0$?
3. La fonction f est -elle-dérivable en 0 ?
4. Montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Etudier la continuité de f'
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

Exercice 19. Soit f une fonction définie sur $]-1,1[$ telle que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad x^4 \leq f(x) \leq 2x^2.$$

1. Peut-on dire quelque chose sur la dérivabilité de f en 0 ?
2. Interprétez graphiquement l'encadrement. Intuitivement, a t-on nécessairement $4x^3 \leq f'(x) \leq 4x$?
3. En considérant la fonction $f(x) = x^3$, résolvez précisément la question précédente.

Exercice 20. Soit k un nombre réel non nul, et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = kx^2$.

1. Montrer que la droite d'équation $y = ax+b$ est tangente à $\mathcal{P}$ si et seulement si $4kb+a^2 = 0$.
2. Soient D et D' deux droites tangentes à $\mathcal{P}$. Montrer que D et D' sont perpendiculaires si et seulement si elles se coupent sur la droite d'équation $y = -1/4k$.

Exercice 21. Montrer que

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 22. Exprimer en fonction de π les nombre suivants :

$$\arctan 2 + \arctan 3\ ;\ \arctan 2 + \arctan(1/2)\ ;\ \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8).$$