Feuille 4. Développements limités

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur $\varepsilon(x)$ pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1. $f_1(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$
2. $f_3(x) = (x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{6} + (x-2)^3\varepsilon(x)$
3. $f_4(x) = (x-2)^2 + (x-2) - 2 + (x-2)\varepsilon(x)$

Exercice 2. Donner les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1. $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 5.
2. $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^6$ à l'ordre 3.
3. $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.

Exercice 3. La fonction $x \to |x|$ admet-elle un DL d'ordre 0 en 0 ? d'ordre 1 en 0 ?

Exercice 4. Donner les DL à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1) $x \to e^x - e^{-x}$; 2) $x \to e^x + \sin(x)$; 3) $x \to x^2\cos(x)$; 4) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; 5) $x \to \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

6) $x \to \dfrac{\sin(x)}{x}$; 7) $x \to \dfrac{x}{1-x} - \log(1-x)$; 8) $x \to e^{2x}$; 9) $x \to (1+x)^{5/2}\sin(x)$

Exercice 5. Donner le développement limité en 0 des fonctions

1. $x \to \exp(x)\ln(1+x)$ (à l'ordre 4)
2. $x \to \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 4)
3. $x \to \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 3)
4. $x \to \ln^2(1+x)$ (à l'ordre 3)
5. $x \to \dfrac{1}{\cos(x)}$ (à l'ordre 4)
6. $x \to \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 4)
7. $x \to \exp(\cos(x))$ (à l'ordre 3)
8. $x \to \sin^6(x)$ (à l'ordre 9)
9. $x \to (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ (à l'ordre 3)
10. $x \to (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (à l'ordre 3)

Exercice 6. Donner les DL à l'ordre 10 au voisinage de 0 de :

1. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$
2. $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt = F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$

Exercice 7. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$.

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.
2. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 8. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{\log(1+x) - x - x^2/2}{x}$ se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 9. Etudier la limite en 0 des fonctions suivantes :

$$a)\ \frac{\sin(x)}{x} \qquad b)\ \frac{\cos(x)-1}{x\log(1+2x)} \qquad c)\ \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}$$
$$d)\ \frac{\log(1+x)-x}{x^3} \qquad e)\ \frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \qquad f)\ \frac{\cos(x)}{x} - \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Exercice 10. Etudier la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

Exercice 11. Soit f une fonction définie au voisinage de a et deux fois dérivable en a. Etudier la limite lorque $h \to 0$ des quantités suivantes :

1. $\dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$
2. $\dfrac{2f(a+3h) - 3f(a+2h) + f(a)}{3h^2}$

Exercice 12.

1. Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction
$$t \to 2e^t - \sqrt[3]{t^3+1}.$$
2. En déduire qu'il existe des nombres réels a, b, c tels que, lorsque $t \to 0$,
$$\frac{2e^t - \sqrt[3]{t^3+1}}{t} = \frac{1}{t} + 2 + at + bt + ct^3 + o(t^3).$$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{t^3+1}.$$
   (a) En posant $t = 1/x$, trouver le développement asymptotique à l'ordre 3 de f au voisinage de $+\infty$.
   (b) En déduire l'équation de l'asymptote (oblique) du graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 13. Donner un développement limité (ou asymptotique) à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$ en 0, $+\infty$, $-\infty$. En déduire les asymptotes de la courbe $y = f(x)$ et la position de la courbe par rapport à celles-ci.