Feuille 5. Étude globale (I)

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$f(x_0) = x_0.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1+4x}{1-\sqrt{1+4x}}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable. Calculer sa dérivée.
3. Donner les images $f(I)$ lorsque I est l'un des intervalles suivants :

$$I = [0,2]\,, \quad I = [0,1/2[\,, \quad I = [3/4,3]\,, \quad I = [-1/4,0[$$

Exercice 3. Déterminer, lorsqu'elles existent, les valeurs extrémales $\sup_I f$ et $\inf_I f$ (en précisant s'il s'agit d'un max et d'un min) de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :
- $f(x) = x^2$ sur $I = [-1,1]$ puis sur $I =]-1,1[$.
- $f(x) = |x|$ sur $[0,1]$.
- $f(x) = 1/x$ sur $I =]0,1[$ puis sur $I =]0,+\infty[$.
- $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [\pi/2, 3\pi/2[$.

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions continue sur un segment $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que,

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) > g(x) + \lambda.$$

(Ce résultat subsiste-il si l'on remplace $[a,b]$ par $]a,b[$)

Exercice 5. Soit f et g deux fonctions n fois dérivables (au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$). Montrer que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n\, f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

Exercice 6. (Extremum locaux) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit c un point intérieur à I tel que $f'(c) = 0$. Montrer que

1. Si $f''(c) > 0$, alors f admet un maximum local en c.
2. Si $f''(c) < 0$, alors f admet un minimum local en c.
3. Si $f''(c) = 0$, ben... on ne peut pas conclure en général.

Exercice 7. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' soit bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour toute constante $\alpha > 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$