Feuille 6. Étude globale (II)

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin(x)} & \text{si } x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Donner un DL à l'ordre 1 en 0 de f, et montrer que f est continue et dérivable sur $]-\pi,\pi[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,\pi[$ on a $\sin(x) - x\cos(x) > 0$.
3. Étudier le sens de variation de f. Montrer que f réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $[1,+\infty[$.

   On notera $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *la fonction réciproque de* f *sur* $[0,\pi[$.
4. Sur quel ensemble la fonction g est-elle continue et dérivable.
5. Vérifier que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $x\sin(g(x)) = g(x)$.
6. Calculer $g(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
7. Calculer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction considérée admet, sur un intervalle que l'on précisera, une fonction réciproque dont on donnera l'ensemble de définition, la régularité et que l'on déterminera :

$$f(x) = \log(1+x^2)\ ; \qquad g(x) = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}.$$

Exercice 3. (La fonction arccos**)** Montrer que la fonction cos restreinte à $[0,\pi]$ possède une fonction réciproque. En faire l'étude.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$.

1. Dire où la fonction est dérivable et calculer sa dérivée. Donner le graphe de f.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque dont on donnera l'expression.

Exercice 5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

1. $\forall x,y \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - \sin(y)| \le |x-y|$.
2. $\forall x,y \in \mathbb{R},\ |\arctan(x) - \arctan(y)| \le |x-y|$.
3. $\forall x \ge 0,\ \dfrac{x}{x+1} \le \log(x+1) \le x$.

Exercice 6. Soit $f :]-\frac{1}{3},+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour $x > \frac{1}{3}$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+1}.$$

1. Quelle est la régularité de f. Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner le sens de variation de f et déterminer $f(]-\frac{1}{3},+\infty[)$
3. Montrer que la fonction f possède une fonction réciproque sur $]-\frac{1}{3},+\infty[$, que l'on notera f^{-1} et dont on donnera l'ensemble de définition et la régularité.
4. Donner les limites de f^{-1} aux bornes de son ensemble de définition.
5. Calculer la dérivée de f^{-1}.