Feuille 7. Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre (sur un intervalle que l'on précisera) les équations différentielles suivantes :

$$y' + \frac{2y}{x} = 0, \quad y' \cos x + y \sin x = 0, \quad (1 + x^2)y' = y$$

Exercice 2. Trouver la solution de l'équation différentielle $y' \tan x - y = 0$ qui prend la valeur 1 pour $x = \pi/6$.

Exercice 3. Résoudre (sur un intervalle que l'on précisera) les équations différentielles

$$y' + y = \cos x + \sin x, \quad xy' - 2y = x^3, \quad y' + y \tan x = \sin 2x.$$

Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ telle que $y(0) = 1$.

Exercice 4.

1. Calculer les dérivées des fonctions $x \to \log(\log(x))$ et $x \to \frac{-1}{\log(x)}$.
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y' x \log(x) - (x^2 \log x + 1)y = e^{x^2/2}$$

Exercice 5.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad \text{et} \quad y'' + y' + y = 0.$$

2. Soit l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{(1+x)^3} \qquad (1).$$

Vérifier que la fonction $y_0(x) = \frac{e^x}{1+x}$ est solution de cette équation. Résoudre l'équation (1). Déterminer la solution de (1) que l'on désignera par $y(x)$ qui satisfait $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6. On pose

$$g(x) = \log\left(\frac{x-2}{x}\right).$$

1. Donner l'ensemble de définition de g et calculer la dérivée de g sur $]2, +\infty[$.
2. Trouver la solution générale sur l'intervalle $]2, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{x(x-2)}\, y \;+\; 2(x-2).$$