

LES ENSEIGNANTS : David Aubin et Alexandre Guilbaud

– *Examen final, 2^e session* –

Mardi 19 juin 2012, de 16h30 à 18h30, amphi 45A.

Enoncé des questions

Toute documentation interdite, à l'exception des notes manuscrites.

L'examen comporte deux parties ; vous devez répondre à toutes les questions de chacune des deux parties.

PARTIE 1 : Cercles et polygones chez Pappus (10 pts)

Vous trouverez en annexe 1 un texte de Pappus d'Alexandrie (4^e siècle ap. J.-C.), extrait de sa *Collection mathématique* (Livre 5, p. 242-243).

- 1) (3 pts) Vérifier et rédiger une preuve du résultat énoncé à la proposition 2 à l'aide de moyens mathématiques actuels.
- 2) (7 pts) Rédiger une *analyse précise et structurée* du texte, en le situant historiquement et en commentant notamment les passages suivants :
 - a. « décrivons [...] $AB\Gamma$; » (p. 242, l. 6-8),
 - b. « puisque [...] ΔEZ , » (p. 242, l. 10-13),
 - c. « les polygones [...] AK . » (p. 242, l. 17-18),
 - d. « la droite $\Theta\Delta$ [...] la droite HK » (p. 242, l. 20 à p. 243, l.1),
 - e. « le rectangle compris sous la droite HK [...] ΔEZ » (p. 243, l. 5-6),
 - f. « tandis que [...] $AB\Gamma$ » (p. 243, l. 7-8),
 - g. « par conséquent [...] $AB\Gamma$ » (p. 243, l. 9-10).

PARTIE 2 : La trisection de l'angle chez Descartes (10 pts)

L'annexe 2 présente un extrait de *La Géométrie* de Descartes, dont nous donnons à la fois l'édition originale (1637, p. 396-397) et l'édition modernisée (1886).

- 1) (2 pts) Dans l'histoire des notations algébriques, indiquez les caractéristiques de celles utilisées par Descartes en tirant notamment des exemples du texte présenté.
- 2) (1 pt) A quelle fonction trigonométrique correspond ce que Descartes la « subtendue » ?
- 3) (3 pts) Justifier mathématiquement les passages suivants du texte de Descartes [on notera α l'angle NOQ] :
 - a. « on voit [...] RS ; » (p. 396, l. 8-9)
[Indice : on démontrera la similitude de triangles bien choisis].
 - b. « en sorte [...] z^3 ; » (p. 396, l. 9 à p. 397, l. 2).
 - c. « Et à cause [...] $-z^3$ » (p. 397, l. 2-4)
[Indice : noter M le point d'intersection de NP et OT, puis montrer que QT = SM et NR = MP].
- 4) (1 pt) Quelles remarques peut-on faire sur la forme de l'exposé mathématique de Descartes ?
- 5) (1 pt) Le résultat utilise-t-il le 5^e postulat d'Euclide ? Justifier sa réponse.
- 6) (2 pt) Comment se situe le problème étudié ici dans la classification des problèmes donnée par Descartes ? Etudier le cas particulier où N = V (V étant le point diamétralement opposé à P sur le cercle).

ANNEXES : Documents

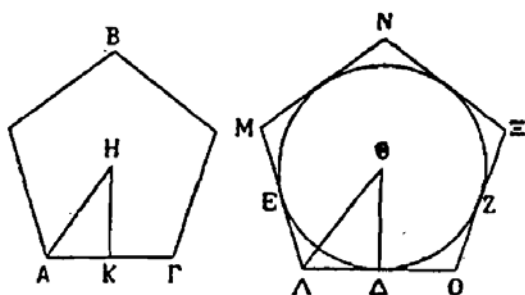
ANNEXE 1 : *Collection mathématique de Pappus.*

Voici des extraits la traduction française par Paul Ver Eecke de la proposition 2 livre V de la *Collection mathématiques de Pappus d'Alexandrie* (Paris, Blanchard, 1982), p. 242-243.

car

PROPOSITION 2. — Soit de nouveau un polygone équilatéral et équiangle $AB\Gamma$ ayant son périmètre égal à la circonférence du cercle ΔEZ ; je dis que le cercle ΔEZ est plus grand que le polygone $AB\Gamma$.

Prenons d'une part le centre Θ du cercle ΔEZ , d'autre part le centre H du cercle circonscrit au polygone $AB\Gamma$; décrivons, autour du cercle, le polygone $\Lambda MNEO$ semblable au polygone $AB\Gamma$; menons la droite de jonction $\Theta\Delta$, et menons la perpendiculaire HK du point H sur la droite $A\Gamma$. Dès lors, puisque le périmètre du polygone $\Lambda MNEO$ est plus grand que la circonférence du cercle ΔEZ ,



[...]]

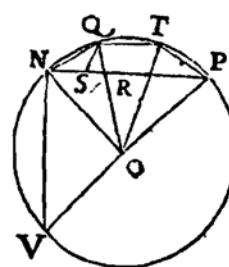
et que la circonférence du cercle est égale au périmètre du polygone $AB\Gamma$, il s'ensuit que le périmètre du polygone $\Lambda MNEO$ est aussi plus grand que le périmètre du polygone $AB\Gamma$. De plus, les polygones sont semblables ; donc, la droite $\Lambda\Delta$ est plus grande que la droite AK . Or, le triangle AHK est semblable au triangle $\Lambda\Theta\Delta$ (car les polygones entiers sont semblables aussi) ; donc, la droite $\Theta\Delta$ est aussi plus grande que

la droite HK . Mais, la circonférence du cercle ΔEZ est égale au périmètre du polygone $AB\Gamma$; donc, le rectangle compris sous la droite $\Delta\Theta$ et la circonférence du cercle ΔEZ est plus grand que le rectangle compris sous la droite HK et le périmètre du polygone $AB\Gamma$. Or, le rectangle compris sous la droite $\Delta\Theta$ et la circonférence du cercle est le double du cercle ΔEZ

[. . .]

; tandis que le rectangle compris sous la droite HK et le périmètre du polygone $AB\Gamma$ est le double du polygone $AB\Gamma$; et il en est ainsi pour les moitiés ; par conséquent, le cercle est plus grand que le polygone $AB\Gamma$.

[...]]



La façon de diuifer vn angle en trois. Tout de mesme si on veut diuifer l'angle NOP , ou bien l'arc, ou portion de cercle $NQTP$, en trois parties esgales; faisant $NO \propto 1$, pour le rayon du cercle, & $NP \propto q$, pour la subtendue de l'arc donné, & $NQ \propto z$, pour la subtendue du tiers de cet arc; l'Equation vient,

$z^3 \propto 3z - q$. Car ayant tiré les lignes NQ , OQ , OT ; & faisant QS parallele a TO , on voit que comme NO est a NQ , ainsi NQ a QR , & QR a RS ; en forte que

que NO estant 1 , & NQ estant z , QR est zz , & RS est z^3 : Et a cause qu'il s'en faut seulement RS , ou z^3 , que la ligne NP , qui est q , ne soit triple de NQ , qui est z , ou à $q \propto 3z -- z^3$ ou bien,

$$z^3 \propto^* 3z -- q.$$

[...]

Fig. 30.



Tout de même si on veut diviser l'angle NOP (fig. 30), ou bien l'arc ou La façon de
diviser un
angle en trois. portion de cercle NQPT en trois parties égales, faisant $NO = 1$ pour le rayon du cercle, et $NP = q$ pour la subtendue de l'arc donné, et $NQ = z$ pour la subtendue du tiers de cet arc, l'équation vient

$$z^3 = 3z - q.$$

Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT, et faisant QS parallèle à TO, on voit que comme NO est à NQ, ainsi NQ à QR, et QR à RS; en sorte que NO étant 1, et NQ étant z , QR est z^2 , et RS est z^3 ; et à cause qu'il s'en faut seulement RS ou z^3 que la ligne NP qui est q ne soit triple de NQ qui est z , on a

$$q = 3z - z^3,$$

ou bien

$$z^3 = 3z - q.$$