**LM300**
**« Histoire des Mathématiques »**
niveau L3
---
Printemps 2013–2014

**L'ENSEIGNANT : David Aubin**

# *– Examen final –*

13 mai 2013, de 8h30 à 10h30.

**Enoncé des questions**

***Toute documentation interdite, à l'exception des notes manuscrites ou copie des notes de cours.***

**L'examen comporte trois parties ; vous devez répondre à toutes les questions de chacune des trois parties. L'examen sera corrigé sur un total de 20 points.**

## Partie 1 : La sommes des angles d'un triangle [7 pts]

Vous trouverez en **annexe 1** deux propositions tirées des *Eléments* d'Euclide. Reportez-vous y pour répondre aux questions suivantes :

a) [2 pts] Rédigez un commentaire détaillé de la preuve de la proposition 16.
b) [1 pt] Expliquez pourquoi cette proposition ne suffit pas à démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.
c) [2 pts] Rédigez un commentaire de la preuve de la proposition 32.
d) [1 pt] Cette proposition dépend-elle de la 5$^{e}$ demande d'Euclide ? Argumentez votre réponse. Si c'est oui, expliquez comment. Si c'est non, expliquez pourquoi.
e) [1 pt] Dans son traité sur la théorie des parallèles, quelle conclusion Lobatchevski tire-t-il à propos de la somme des angles d'un triangle ?

## Partie 2 : Résolution de l'équation du second degré chez Descartes [7 pts]

Vous trouverez en **annexe 2** un extrait de la *Géométrie* de Descartes. Reportez-vous y pour répondre aux questions suivantes :

a) [1 pt] Quelle est, en notation moderne, l'équation algébrique dont Descartes cherche à construire une solution ?
b) [2 pts] Montrez que la construction proposée par Descartes donne bien la solution demandée.
c) [2 pt] Comment interprétez-vous algébriquement le dernier paragraphe ? Pourquoi Descartes dit-il que l'équation n'a aucune solution ?
d) [2 pts] Quelle est l'importance de cette construction pour Descartes ? [Indice : référez-vous à la définition donnée des problèmes plan par Descartes.]

## Partie 3 : Le conventionalisme de Poincaré [9 pts]

Vous trouverez en **annexe 3** un extrait d'un texte de Poincaré. Reportez-vous y pour répondre aux questions suivantes :

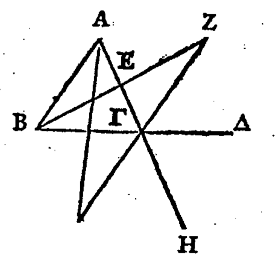
a) [1 pt] Pourquoi Poincaré affirme-t-il que les axiomes de la géométrie ne sont pas des vérités expérimentales ?
b) [1 pt] Lorqu'il écrit que ce ne sont pas non plus des jugements synthétiques *a priori*, à la pensée de quel philosophe influent fait-il référence ?
c) [1 pt] La solution de Poincaré est de dire que les axiomes de la géométrie sont des *conventions*, qu'ils ne sont ni vrais ni faux, seulement commodes. Cette conviction est-elle partagée par Einstein ? Expliquez pouquoi.
d) [3 pts] Rédigez une courte synthèse des apports des grands mathématiciens suivants au sujet des géométries non euclidiennes : Gauss, Bolyai, Lobatchevski, Beltrami, Riemann et Hilbert ?

**ANNEXE 1 : Euclide**

## PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ABΓ, prolongeons le côté BΓ vers Δ; je dis que l'angle extérieur AΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓBA, BAΓ.



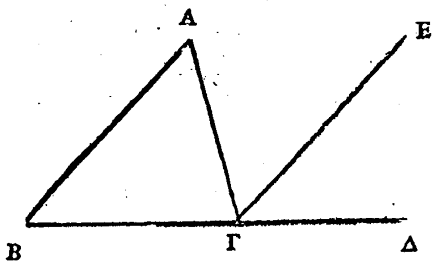

Partageons la droite AΓ en deux parties égales en E (10); et ayant joint la droite BE, prolongeons-la vers Z, faisons EZ égal à BE (3), joignons la droite ZΓ, et prolongeons AΓ vers H.

Puisque AE est égal à EΓ, et BE égal à EZ, les deux droites AE, EB sont égales aux deux droites ΓE, EZ, chacune à chacune; mais l'angle AEB est égal à l'angle ZEΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base AB est égale à la base ZΓ (4); le triangle ABE est égal au triangle ZEΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle BAE est égal à l'angle EΓZ (not. 9); mais l'angle EΓΔ est plus grand que l'angle EΓZ; donc l'angle AΓΔ est plus grand que l'angle BAE. Si on partage le côté BΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle BΓH, c'est-à-dire AΓΔ, est plus grand que l'angle ABΓ. Donc, etc.

## PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.



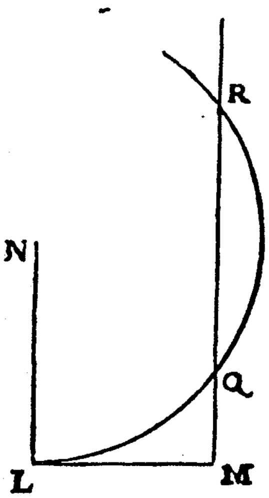

Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

**ANNEXE 2 : Descartes.**

<u>Source</u> : René Descartes, *La Géométrie,* 1637.




Enfin ſi i'ay

$z^{2} \infty az - bb$ :

ie fais N L eſgale à $\frac{1}{2}a$, & L M eſgale à $b$ cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée $z$ eſt M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et ſi le cercle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible.

**ANNEXE 3 : Poincaré.**

Henri Poincaré, « Les Géométries non euclidiennes », *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902, p. 70.

Devons-nous conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ? Mais on n'expérimente pas sur des droites ou des circonférences idéales ; on ne peut le faire sur des objets matériels. Sur quoi porteraient donc les expériences qui serviraient de fondement à la géométrie ? La réponse est facile.

Nous avons vu plus haut que l'on raisonne constamment comme si les figures géométriques se comportaient à la manière des solides. Ce que la géométrie emprunterait à l'expérience, ce seraient donc les propriétés de ces corps.

Les propriétés de la lumière et sa propagation rectiligne ont été aussi l'occasion d'où sont sorties quelques-unes des propositions de la géométrie, et en particulier celles de la géométrie projective, de sorte qu'à ce point de vue on serait tenté de dire que la géométrie métrique est l'étude des solides et que la géométrie projective est celle de la lumière.

Mais une difficulté subsiste, et elle est insurmontable. Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte, elle serait soumise à une continuelle révision. Que dis-je ? elle serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur puisque nous savons qu'il n'existe pas de solide rigoureusement invariable.

***Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques*** à priori, ***ni des faits expérimentaux.***