LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2024-2025

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN et Nicolas JOHANNES

– Examen partiel –

Vendredi 14 mars 2024, 10h45–12h15, Amphi A56.

Toute documentation est interdite.

PARTIE 1 : les Éléments d'Euclide (10 pts)

Vous trouverez en **annexe 1** la proposition 2 du livre 1 des *Éléments* d'Euclide (trad. Peyrard).

1) [1 pt] Identifiez les différentes parties de cette proposition.
2) [1 pt] Identifiez et justifiez toutes les étapes de la construction de cette proposition.
3) [2 pts] Identifiez et justifiez toutes les étapes de la démonstration de cette proposition.

4) [3 pts] À partir des éléments contextuels tirés de la preuve ci-dessus ou des connaissances apprises en cours, donnez un énoncé plausible pour :
    a. demande 1 ;
    b. proposition 1 ;
    c. demande 3 ;
    d. définition 15 ;
    e. notion commune 1 ;
    f. notion commune 3.

5) [1 pt] Quelle demande non signalée par Peyrard est également utilisée par Euclide ?

6) [2 pts] Exprimez en vos propres mots l'utilité de cette proposition dans les *Éléments*.

PARTIE 2 : l'algèbre d'Al-Khawarizmi (10 pts)

Vous trouverez en **annexe 2** la traduction en français d'extraits du livre d'Al-Khawarizmi sur l'algèbre.

1) [2 pts] Montrez que l'algorithme énoncé par l'auteur correspond bien à la solution habituelle d'une équation du second degré. Si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions de l'équation sont données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2) [4 pts] Rédigez un commentaire de la démonstration.

3) [2 pts] Dans les conditions sous-entendues par Al-Khawarizmi, pourquoi ne considère-t-on qu'une seule solution ? Y a-t-il des cas où cette équation n'a aucune solution positive ?

4) [4 pts] Commentez le sixième problème donné par Al-Khawarizmi : vous expliquerez, entre autres, comment l'énoncé est transformé en une équation canonique et comment celle)ci est résolue.

ANNEXE 1 – Euclide

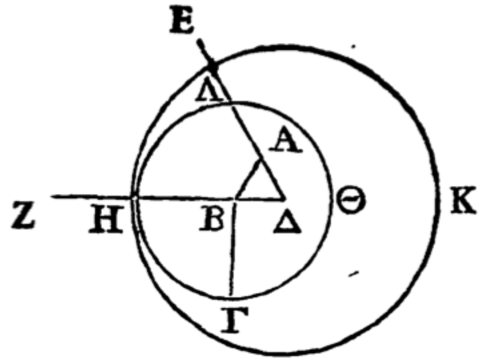
F. Peyrard, *Le Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours* (Paris : M. Patris, 1814), t. 1, p. 8-9.

PROPOSITION II.

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit A le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point A placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.

Menons du point A au point B la droite AB (dem. 1); sur cette droite construisons



le triangle équilatéral ΔAB (prop. 1); menons les droites AE, BZ dans la direction de ΔA, ΔB; du centre B et de l'intervalle ΒΓ, décrivons le cercle ΓΗΘ (dem. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔH, décrivons le cercle HKΛ.

Puisque le point B est le centre du cercle ΓΗΘ, ΒΓ est égal à BH (déf. 15); de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle HKΛ, la droite ΔΛ est égale à la droite ΔH; mais ΔA est égal à ΔB; donc le reste AΛ est égal au reste BH (not. 3). Mais on a démontré que ΒΓ est égal à BH; donc chacune des droites AΛ, ΒΓ est égale à BH. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc AΛ est égal à ΒΓ.

Donc, au point donné A, on a placé une droite AΛ égale à la droite donnée ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ANNEXE 2 – Khawarizmi

Al-Khawarizmi, *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* ; traduction française par D. Aubin, tirée de la traduction anglaise de Frederic Rosen in *The Algebra of Mohammed ben Musa* (Londres : The Oriental Translation Fund, 1831), p. 12-13, 19-20 et 40-41.

Des racines et un nombre égalent des carrés.

Par exemple, si on a : « trois racine et quatre dirhams sont égaux à un carré ».

Solution : Divise les racines en deux ; la moitié et un et demi. Multiplie le résultat par lui-même ; le produit est deux et un quart. Ajoute ceci aux quatre dirhams ; la somme est six et un quart. Extraie la racine ; c'est deux et demi. Ajoute ceci à la moitié des racines, qui est un et demi ; la somme est quatre. Ceci est la racine du carré et le carré est seize.

Si jamais tu te trouves confronté à un multiple ou un sous-multiple d'un carré, reduis-le à un seul carré.

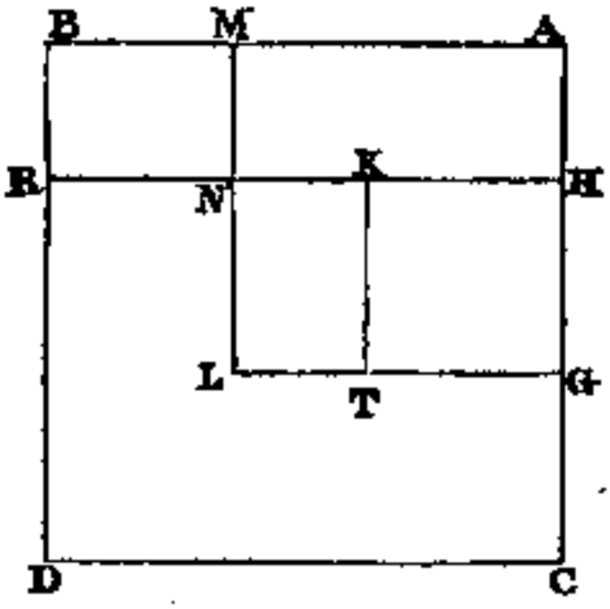
[...]

Démonstration du cas : trois racines et quatre dirhams égalent un carré

Soit un carré représenté par un rectangle dont les côtés sont inconnus, bien qu'ils soient égaux entre eux, tout comme les angles. Ce carré AD comprend les trois racines et les quatre dirhams cités dans cet exemple. Dans ce carré, l'un des côtés multiplié par l'unité est une racine. Découpons maintenant le rectangle HD du carré AD et posons que l'un des côtés HC est égal à trois, qui est le nombre des racines. Le même nombre est égal à RD. Il s'en suit donc que le rectangle HB représente le nombre 4 qui est additionné aux racines. Découpons le côté CH en deux parties égales [...] au point G ; et construisons le carré HT, qui est le produit de la moitié des racines (soit un et demi) multipliée par elle-même, soit deux et un quart. Nous ajoutons au segment GT le segment TL égal à AH, de sorte que le segment GL soit égal à AG et le segment KN à TL. On a donc construit un nouveau rectangle équilatéral GM ; et nous trouvons que le segment AG est égal à ML et à GL. Par ce moyen, le segment CG reste égal à NR et le segment MN à TL ; [on a aussi] que le rectangle [BN] découpé de HB est égal au rectangle KL.

On sait que le rectangle AR représente quatre dirhams qui sont additionnés aux trois racines. Le rectangle AN et le rectangle KL sont, ensembles, égaux au rectangle AR, qui représente quatre dirhams.

On a également vu que le rectangle GM comprend le produit de la moitié des racines, soit un et demi, par elle-même, c'est-à-dire deux et un quart, et quatre dirhams, représentés par les rectangles AN et KL. Il ne reste plus du côté du grand carré original AD, qui représente le carré en entier, que la moitié des racines, c'est-à-dire un et demi, soit le segment GC. Si on ajoute ceci au segment AG, qui la racine du carré GM, égal à deux et demi, alors ceci additionné à CG, ou la moitié des trois racines, soit un et demi, font quatre, qui est le segment AC, ou la racine du carré qui est représenté par le carré AD. Voici la figure [page suivante] :



[...]

Sixième problème

J'ai multiplié le tiers d'une racine par le quart de la même racine ; et le produit est égal à la racine plus 24 dirhams.

Calcul : Appelle la racine la chose ; on aura donc qu'un tiers de la chose multipliée par un quart de la chose, soit la moitié d'un sixième du carré, est égal à la chose et 24 dirhams. Multiplie cette moitié d'un sixième par 12, pour rendre le carré entier, et multiplie aussi la chose par 12, ce qui donne douze choses, et aussi 24 par 12 ; le produit sera donc 288 dirhams et 12 racines, qui sont égaux à un carré. La moitié des racines est six. Multiplie ceci par lui-même, et ajoutes-y 288, ce sera 324. Extraie la racine, qui est 18. Ajoute ceci à la moitié des racines, qui est 6 ; la somme est 24, et ceci est le carré recherché. Cette question se réfère à l'un des six cas, à savoir « des racines et des nombres égalent des carrés ».