L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN et Nicolas JOHANNES

– Examen partiel –

Vendredi 14 mars 2024, 10h45–12h15, Amphi A56.

Toute documentation est interdite.

PARTIE 1 : les Éléments d'Euclide (10 pts)

Vous trouverez en **annexe 1** la proposition 2 du livre 1 des *Éléments* d'Euclide (trad. Peyrard).

1) [1 pt] Identifiez les différentes parties de cette proposition.

   Enoncé : « À un point donné, placer une droite égale à une droite donnée ».
   Exposition : « Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée ».
   Détermination : « il faut au point A placer une droite égale à la droite donnée BΓ ».
   Contruction : « Menons du point A […], décrivons le cercle HKΛ. »
   Démonstration : « Puisque le point B […] ; donc AΛ est égal à BΓ. »
   Conclusion : « Donc, à un point donné […] », etc.

   Barème : 1 pt pour réponse exacte ; – 0,5 par erreur.

2) [1 pt] Identifiez et justifiez toutes les étapes de la construction de cette proposition.

   1°) Construire un segment de droite AB entre les points A et B. C'est possible à cause de la demande 1.
   2°) La proposition 1 nous permet de construire un triangle équilatéral sur la base AB. Le troisième point du triangle est appelé Δ.
   3°) La demande 2 est employée pour prolonger les segments de droites ΔA et ΔB ; on dénote ces demi-droites, respectivement, par AE et BZ.
   4°) La demande 3 est utilisée pour tracer deux cercles, respectivement :
      a) Le cercle ΓHΘ, de centre B et de rayon BΓ ;
      b) Le cercle HKΛ, de centre Δ et de rayon ΔH.

   Barème : 1 pt pour réponse exacte ; – 0,25 par erreur.

3) [2 pts] Identifiez et justifiez toutes les étapes de la démonstration de cette proposition.

1°) On établit que ΒΓ = ΒΗ, puisqu'il s'agit de deux rayons du même cercle ΓΗΘ. C'est la définition 15 qui précise cette propriété du cercle.
2°) On établit de même que ΔΛ = ΔΗ, puisqu'il s'agit de deux rayons du cercle ΗΚΛ.
3°) On établit ensuite que ΑΛ = ΒΗ. Cette égalité découle du fait que ΔΑ = ΔΒ, car ce sont les côtés d'un triangle équilatérale et que, par construction, ΔΛ = ΔΑ + ΑΛ et ΔΗ = ΔΒ + ΒΗ. Il suffit alors d'appliquer la notion commune 3 pour déduire que ΑΛ = ΒΗ.
4°) On a donc ΒΓ = ΒΗ et ΑΛ = ΒΗ. La notion commune 1 permet donc d'affirmer que ΑΛ = ΒΓ. C'est ce qu'il fallait démontrer.

<u>Barème</u> : 2 pts pour réponse exacte ; – 0,5 par erreur.

4) [3 pts] À partir des éléments contextuels tirés de la preuve ci-dessus ou des connaissances apprises en cours, donnez un énoncé plausible pour :
   a. demande 1 ;

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconqne.

   b. proposition 1 ;

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

   c. demande 3 ;

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelcouque, décrire une circonférence de cercle.

   d. définition 15 ;

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

   e. notion commune 1 ;

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.

   f. notion commune 3.

3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

<u>Barème</u> : 3 pts pour réponse exacte ; – 0,5 par erreur.

5) [1 pt] Quelle demande non signalée par Peyrard est également utilisée par Euclide ?

La demande 2.

6) [2 pts] Exprimez en vos propres mots l'utilité de cette proposition dans les *Éléments*.

Cette proposition permet de positionner un segment d'une longueur donnée en n'importe quel point donné. Elle permet de translater et faire subir une rotation quelconque à n'importe quelle figure donnée. Elle est utilisée dans la proposition suivante (3) permettant de retrancher un segment donné d'un segment plus grand. Ce sont des opérations de base qui servent souvent par la suite dans les *Éléments*.

<u>Barème</u> : 2 pts pour réponse exacte : 1 pt pour explication ; 1 pt pour usage dans les Éléments.

PARTIE 2 : l'algèbre d'Al-Khawarizmi (10 pts)

Vous trouverez en **annexe 2** la traduction en français d'extraits du livre d'Al-Khawarizmi sur l'algèbre.

1) [2 pts] Montrez que l'algorithme énoncé par l'auteur correspond bien à la solution habituelle d'une équation du second degré. Si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions de l'équation sont données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dans cette formule, lorque $a = 1$ et qu'on remplace $b = -p$ et $c = -q$, on obtient :

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q},$$

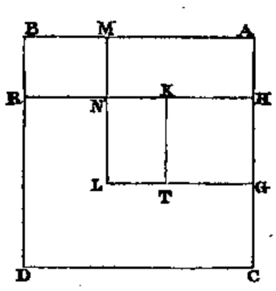
L'équation considérée ici est $x^2 = 3x + 4$. Le calcul effectué correspond bien aux données $\frac{p}{2} = 1{,}5$ et $q = 4$, soit $x = 1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 + 4} = 1{,}5 + \sqrt{6{,}25} = 1{,}5 + 2{,}5 = 4$.

<u>Barème</u> : 2 pts pour réponse exacte ; – 0,5 par erreur.

2) [4 pts] Rédigez un commentaire de la démonstration.

La démonstration de l'algorithme est géométrique. On sait que le carré $x^2 = 3x + 4$. On représente l'inconnue au carré par un carré ABCD, c'est-à-dire : $\mathcal{A}(\text{ABCD}) = x^2$.

On sait donc, à cause de l'équation, que si on découpe l'un des côté AC au point H en deux parties, de sorte que la longueur HC = 3, alors le carré AD sera découpé en deux rectangle HRDC d'aire $3x$ et ABRH d'aire 4.
En d'autres termes, on a $\mathcal{A}(\text{RHCD}) = 3x$ et $\mathcal{A}(\text{ABRH}) = 4$.



Construction :

1. On coupe HC en deux parties égales au point G et on trace le carré HGTK. Comme GH a pour longueur la moitiés de HC qui est 3, on aura donc $\mathcal{A}(\text{HGTK}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25.$
2. On construit ensuite un nouveau carré GAML en ajoutant au segment GT le segment TL égal à AH.
3. On remarque que le rectange KTLN ainsi construit a la même aire que le rectangle BMNR, car ils ont même largeur et même longueur, soit $\mathcal{A}(\text{BMNR}) = \mathcal{A}(\text{KTLN})$.

Démonstration :

1. Puisque $\mathcal{A}(\text{ABRH}) = 4$ (par hypothèse) et que ABRH = MAHN + BMNR, on aura que $\mathcal{A}(\text{MANH}) + \mathcal{A}(\text{ABRH}) = \mathcal{A}(\text{MANH}) + \mathcal{A}(\text{NKLT}) = 4$.
2. On peut maintenant calculer $\mathcal{A}(\text{MAGL}) = \mathcal{A}(\text{HGTK}) + \mathcal{A}(\text{MANH}) + \mathcal{A}(\text{NKLT})$. On sait que les deux derniers termes ensemble font 4 et que $\mathcal{A}$(HGTK)=2,25. On a donc $\mathcal{A}(\text{MAGL}) = 6{,}25$.
3. Pour calculer la valeur de l'inconnue $x =$ AC, il suffit donc d'additionner CG+AG. Or, AG est la racine de $\mathcal{A}(\text{MAGL})$, soit 2,5, comme on vient de le montrer ; et CG = GH = 1,5 (par construction). On a donc que $x = AC = 4$.

En représentant $\mathcal{A}(\text{RHCD}) = px$ et $\mathcal{A}(\text{ABRH}) = q$, on aurait pu trouver la formule générale. En effet, selon la preuve ci-dessus :

$$x = \text{AC} = \text{CG} + \text{AG} = \frac{\text{CH}}{2} + \sqrt{\mathcal{A}(\text{MAGL})} = \frac{\text{CH}}{2} + \sqrt{\mathcal{A}(\text{HGTK}) + \mathcal{A}(\text{MANH}) + \mathcal{A}(\text{NKLT})}$$
$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

<u>Barème</u> : 4 pts pour réponse exacte ; – 0,5 par erreur.

3) [2 pts] Dans les conditions sous-entendues par Al-Khawarizmi, pourquoi ne considère-t-on qu'une seule solution ? Y a-t-il des cas où cette équation n'a aucune solution positive ?

Lorsque p et q sont positifs, la deuxième solution est nécessairement négative, puisque :

$\frac{p}{2} < \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$. Dans ce cas, l'équation a toujours une et une seule solution positive. On peut même dire que cette solution est toujours plus grande ou égale à p, tandis que la solution négative est plus grande $-\sqrt{q}$.

<u>Barème</u> : 2 pts pour réponse exacte ; 1 pt pour inégalité ; 1 pt pour une et une seule solution.

4) [4 pts] Commentez le sixième problème donné par Al-Khawarizmi : vous expliquerez, entre autres, comment l'énoncé est transformé en une équation canonique et comment celle)ci est résolue.

Ce problème consiste à résoudre l'équation $\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{4}\right) = x + 24$, soit $x^2 = 12x + 288$.
En employant l'algorithme fourni, nous trouvons :

$$x = \frac{12}{2} + \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 288} = 6 + \sqrt{36 + 288} = 6 + \sqrt{324} = 6 + 18 = 24.$$

Pour pouvoir appliquer cet algorithme, l'auteur développe explique qu'il faut avoir un carré entier. Pour y arriver, il dit qu'on peut multiplier par 12 le produit du tiers de l'inconnu par le son quart pour obtenir un carré entier, mais que, ce faisant, il est nécessaire aussi de multiplier par 12 les autres termes de l'équation. A partir de là, il suffit d'appliquer l'algorithme.

<u>Barème</u> : 4 pts pour réponse exacte ; – 0,5 par erreur.

ANNEXE 1 – Euclide

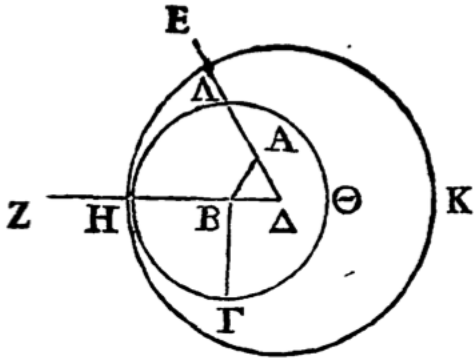
F. Peyrard, *Le Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours* (Paris : M. Patris, 1814), t. 1, p. 8-9.

PROPOSITION II.

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée; il faut au point A placer une droite égale à la droite donnée BΓ.

Menons du point A au point B la droite AB (dem. 1); sur cette droite construisons



le triangle équilatéral ΔAB (prop. 1); menons les droites AE, BZ dans la direction de ΔA, ΔB; du centre B et de l'intervalle BΓ, décrivons le cercle ΓHΘ (dem. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔH, décrivons le cercle HKΛ.

Puisque le point B est le centre du cercle ΓHΘ, BΓ est égal à BH (déf. 15); de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle HKΛ, la droite ΔΛ est égale à la droite ΔH; mais ΔA est égal à ΔB; donc le reste AΛ est égal au reste BH (not. 3). Mais on a démontré que BΓ est égal à BH; donc chacune des droites AΛ, BΓ est égale à BH. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc AΛ est égal à BΓ.

Donc, au point donné A, on a placé une droite AΛ égale à la droite donnée BΓ. Ce qu'il fallait faire.

ANNEXE 2 – Khawarizmi

Al-Khawarizmi, *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* ; traduction française par D. Aubin, tirée de la traduction anglaise de Frederic Rosen in *The Algebra of Mohammed ben Musa* (Londres : The Oriental Translation Fund, 1831), p. 12-13, 19-20 et 40-41.

Des racines et un nombre égalent des carrés.

Par exemple, si on a : « trois racine et quatre dirhams sont égaux à un carré ».

Solution : Divise les racines en deux ; la moitié et un et demi. Multiplie le résultat par lui-même ; le produit est deux et un quart. Ajoute ceci aux quatre dirhams ; la somme est six et un quart. Extraie la racine ; c'est deux et demi. Ajoute ceci à la moitié des racines, qui est un et demi ; la somme est quatre. Ceci est la racine du carré et le carré est seize.

Si jamais tu te trouves confronté à un multiple ou un sous-multiple d'un carré, reduis-le à un seul carré.

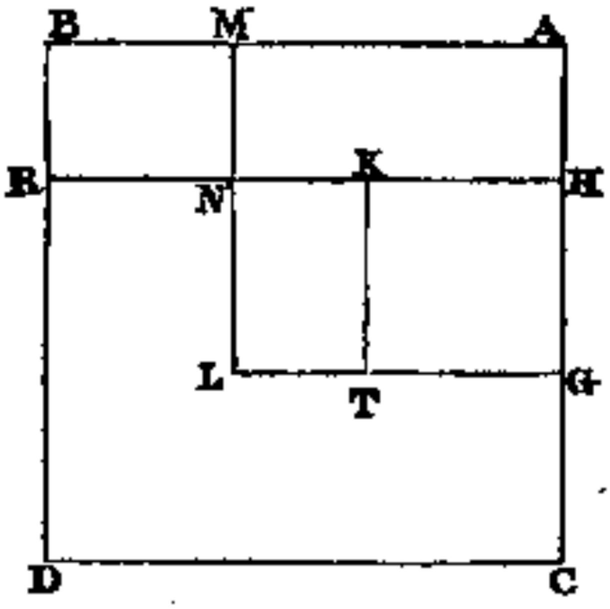
[…]

Démonstration du cas : trois racines et quatre dirhams égalent un carré

Soit un carré représenté par un rectangle dont les côtés sont inconnus, bien qu'ils soient égaux entre eux, tout comme les angles. Ce carré AD comprend les trois racines et les quatre dirhams cités dans cet exemple. Dans ce carré, l'un des côtés multiplié par l'unité est une racine. Découpons maintenant le rectangle HD du carré AD et posons que l'un des côtés HC est égal à trois, qui est le nombre des racines. Le même nombre est égal à RD. Il s'en suit donc que le rectangle HB représente le nombre 4 qui est additionné aux racines. Découpons le côté CH en deux parties égales […] au point G ; et construisons le carré HT, qui est le produit de la moitié des racines (soit un et demi) multipliée par elle-même, soit deux et un quart. Nous ajoutons au segment GT le segment TL égal à AH, de sorte que le segment GL soit égal à AG et le segment KN à TL. On a donc construit un nouveau rectangle équilatéral GM ; et nous trouvons que le segment AG est égal à ML et à GL. Par ce moyen, le segment CG reste égal à NR et le segment MN à TL ; [on a aussi] que le rectangle [BN] découpé de HB est égal au rectangle KL.

On sait que le rectangle AR représente quatre dirhams qui sont additionnés aux trois racines. Le rectangle AN et le rectangle KL sont, ensembles, égaux au rectangle AR, qui représente quatre dirhams.

On a également vu que le rectangle GM comprend le produit de la moitié des racines, soit un et demi, par elle-même, c'est-à-dire deux et un quart, et quatre dirhams, représentés par les rectangles AN et KL. Il ne reste plus du côté du grand carré original AD, qui représente le carré en entier, que la moitié des racines, c'est-à-dire un et demi, soit le segment GC. Si on ajoute ceci au segment AG, qui la racine du carré GM, égal à deux et demi, alors ceci additionné à CG, ou la moitié des trois racines, soit un et demi, font quatre, qui est le segment AC, ou la racine du carré qui est représenté par le carré AD. Voici la figure [page suivante] :



[...]

Sixième problème

J'ai multiplié le tiers d'une racine par le quart de la même racine ; et le produit est égal à la racine plus 24 dirhams.

Calcul : Appelle la racine la chose ; on aura donc qu'un tiers de la chose multipliée par un quart de la chose, soit la moitié d'un sixième du carré, est égal à la chose et 24 dirhams. Multiplie cette moitié d'un sixième par 12, pour rendre le carré entier, et multiplie aussi la chose par 12, ce qui donne douze choses, et aussi 24 par 12 ; le produit sera donc 288 dirhams et 12 racines, qui sont égaux à un carré. La moitié des racines est six. Multiplie ceci par lui-même, et ajoutes-y 288, ce sera 324. Extraie la racine, qui est 18. Ajoute ceci à la moitié des racines, qui est 6 ; la somme est 24, et ceci est le carré recherché. Cette question se réfère à l'un des six cas, à savoir « des racines et des nombres égalent des carrés ».