LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2023-2024

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN et Nicolas JOANNES

– Examen final –

Jeudi 16 mai 2024, 8h30–10h30, Amphi B3.

Toute documentation est interdite.

QUESTION 1 [10 pts] : La Roulette de Roberval

Vous trouverez en **annexe 1** un extrait d'un texte de Roberval. Rédigez un commentaire argumenté de ce texte avec introduction, développement et conclusion dans lequel vous aborderez notamment les points suivants :

a) Qui était Roberval et à quelle époque a-t-il vécu ?
b) Qu'est que la « roulette » dont il est ici question ?
   Quel a été son rôle dans l'histoire des mathématiques ?
c) Qu'est-ce que la méthode des indivisibles ?
d) Quel résultat mathématique est ici démontré par Roberval ?
   Décrivez de manière détaillée les étapes de sa preuve ?
e) Que pensez-vous de la rigueur de cette preuve ?
   Discutez cette question en fonction du contexte historique, notamment en relation avec les premiers fondements du calcul intégral.

QUESTION 2 [10 pts] : Parallélisme chez Lobatchevski

Vous trouverez en **annexe 2** l'énoncé des propositions 17 et 18, de même que l'énoncé et la preuve de la proposition 25 des *Études géométriques sur la théorie des parallèles* de Nikolai Lobachevski. A partir de ces éléments, répondez aux questions suivantes :

1) [2 pts] Rappelez quelle est l'énoncé du 5^{e} postulat (ou axiome des parallèles) chez Euclide. Donnez au moins un autre énoncé qui lui est équivalent.

2) [3 pts] Rappelez la définition de l'angle de parallélisme $\Pi(p)$ proposé par Lobachevski dans la proposition 16 de son traité. Dans quel cas est-ce que la géométrie de Lobachevski diffère de la géométrie euclidienne ? Comment Lobatchevski définit-il le parallélisme ?

3) [2 pt] Dans les proposition suivantes 17 et 18, Lobachevski établit deux propriétés importantes du parallélisme tel qu'il le définit : lesquelles ?

4) [3 pt] Commentez la preuve de la proposition 25.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Roberval.

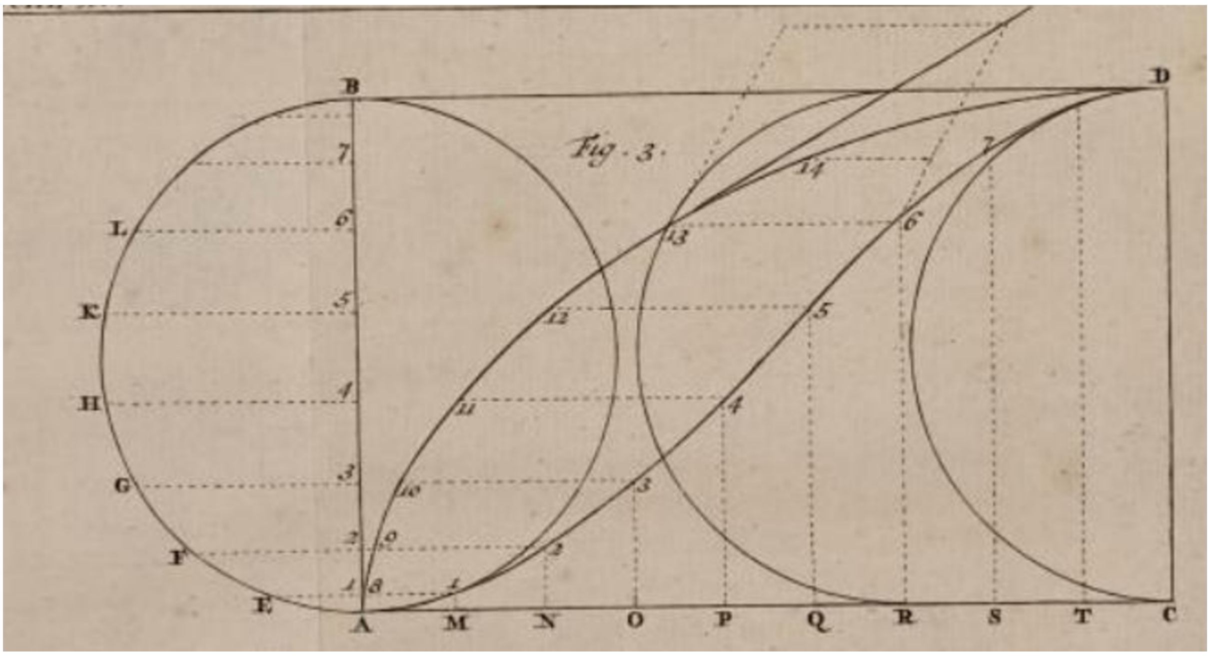
Source : Gilles Personne de Roberval, *Traité des indivisibles* (publié en 1693, mais écrit plus tôt, peut-être dans les années 1630).

EXPLICATION DE LA ROVLETTE.

NOUS poſons que le diamétre AB du cercle AEFGB ſe meut parallelement à ſoy-meſme, comme s'il eſtoit emporté par quelqu'autre corps, juſques à ce qu'il ſoit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonféren-

ce du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, en ſorte que quand le diamétre eſt en CD, le point A eſt venu en B, & la ligne AC ſe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courſe du diamétre ſe diviſe en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle ſe diviſe auſſi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a eſté dit. En aprés je conſidére le chemin qu'a fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un du diamétre en avant, l'autre du ſien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il eſt venu en E il eſt élevé audeſſus de ſon premier lieu duquel il eſt parti ; cette hauteur ſe marque tirant du point E au diamétre AB un ſinus E 1, & le ſinus Verſe A 1 eſt la hauteur dudit A quand il eſt venu en E. De meſme quand il eſt venu en F, du point F ſur AB je tire le ſinus F 2, & A 2 ſera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le ſinus G 3, le ſinus Verſe A 3 ſera la hauteur de A quand il eſt parvenu en G; & faiſant ainſi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes ſes hauteurs & élevemens pardeſſus l'extrémité du diamétre A, qui ſont A 1, A 2, A 3, A 4, A 5, A 6, A 7; donc, afin d'avoir les lieux par où paſſe ledit point A, & ſçavoir la ligne qu'il forme pendant ſes deux mouvemens, je porte toutes ſes hauteurs ſur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M 1, N 2, O 3, P 4, Q 5, R 6, S 7 ſont les meſmes que celles qui ſont priſes ſur AB. Puis je prends les meſmes ſinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte ſur chaque hauteur trouvée ſur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces ſinus ſe forment deux lignes, dont l'une eſt A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je ſçay comme s'eſt fait la ligne A 8 9 D: mais pour ſçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A eſt monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier eſpace pen-

pendant que AB eſt venu en M, le ſecond pendant que AB eſt venu en N, & ainſi toûjours également d'un eſpace à l'autre juſques à ce que le diamétre ſoit arrivé en CD ; alors le point A eſt monté en B. Voilà comment s'eſt formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un eſpace, eſtant ſéparées l'une de l'autre par tous les ſinus, & ſe rejoignant enſemble aux deux extrémitez A, D. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes eſt égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'iceluy ; car les unes & les autres ſont compoſées de lignes égales, ſçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des ſinus E 1, F 2, &c. qui ſont les meſmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainſi la figure A 4 D 12 eſt égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D diviſe le parallelogramme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié ſont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD ; & partant, ſelon Archiméde, la moitié eſt égale au cercle, auquel ajouſtant le demi-cercle, ſçavoir l'eſpace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'eſpace A 8 9 D C ; & faiſant de meſme pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.



ANNEXE 2 : Lobachevski.
Source : Nikolai Lobachevski, *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, trad. J. Hoüel, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

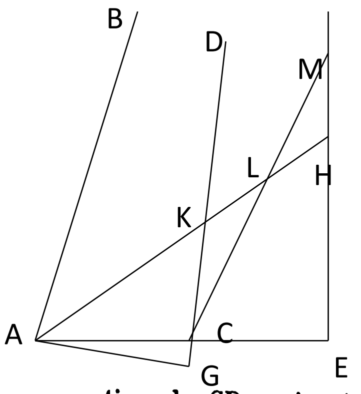
17. *Une ligne droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points.*

18. *Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.*

25. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Supposons d'abord que les trois droites AB, CD, EF (*fig.* 12), soient situées dans un même plan et se succèdent dans l'ordre indiqué. Si les deux premières AB et CD sont parallèles chacune à la troisième EF, je dis que AB et CD seront aussi parallèles entre elles. Pour le démontrer, d'un point quelconque A de la ligne extrême AB, abaissons sur l'autre ligne extrême EF la perpendiculaire AE, laquelle rencontrera la ligne intermédiaire CD en un point C [prop. 3], et sous un angle DCE $< \frac{1}{2}\pi$ dans le sens de la direction de CD, qui est parallèle à la direction EF [prop. 22]. Une perpendiculaire AG, abaissée du même point sur CD, devra tomber dans l'ouverture de l'angle aigu ACG [prop. 9], et toute autre ligne AH, menée par A dans l'intérieur de l'angle BAC, devra rencontrer quelque part en H la droite EF parallèle à AB. Par conséquent, dans le triangle AEH, la ligne CD devra couper AH quelque part en K, puisqu'il est impossible qu'elle rencontre EF. Si AH était menée du point A dans l'intérieur de l'angle CAG, elle devrait couper le prolongement de CD entre les points C et G, dans le triangle CAG. De là résulte que AB et CD sont parallèles [prop .16 et 18].

Fig. 12.



Si les deux lignes extrêmes AB, EF, sont supposées chacune parallèles à la ligne intermédiaire CD, alors toute ligne AK, menée par le point A dans l'intérieur de l'angle BAE, coupera la ligne CD en un point quelconque K, quelque petit que soit l'angle BAK. Sur le prolongement de AK, prenons à volonté un point L, et joignons-le au point C par la ligne CL; celle-ci devra rencontrer EF quelque part en M, de manière à former un triangle MCE. Le prolongement de la ligne AL à l'intérieur du triangle MCE ne peut rencontrer une seconde fois ni AC ni CM; donc ce prolongement rencontrera EF quelque part en H, et par conséquent AB et EF sont parallèles entre elles.