LU3MA209 –
Éléments d'histoire des mathématiques
2023-2024

L'ÉQUIPE ENSEIGNANTE :
David AUBIN et Nicolas JOHANNES

– Examen partiel –

Vendredi 15 mars 2024, 10h45–12h15, Amphi A3.

Toute documentation est interdite, sauf notes de cours et notes manuscrites.

PARTIE 1 : Euclide (10 pts)

Vous trouverez en **annexe 1** la proposition 15 du livre 6 des *Éléments* d'Euclide (trad. Peyrard).

1) [5 pts] Rédigez un commentaire détaillé de la proposition.

2) [5 pts] À partir des éléments contextuels tirés de la preuve ci-dessus, donnez un énoncé plausible des différentes propositions suivantes et une idée de leur preuve :
   a. proposition 14 du livre 1 ;
   b. proposition 7 du livre 5 ;
   c. proposition 9 du livre 5 ;
   d. proposition 11 du livre 5 ;
   e. proposition 1 du livre 6.

PARTIE 2 : Papyrus d'Ayer (10 pts)

Le papyrus d'Ayer, aujourd'hui à Chicago, provient d'Egypte et a été daté du 1er siècle de notre ère. En **annexe 2**, vous trouverez une traduction d'un extrait du texte du papyrus (grec à l'origine), qui propose une méthode pour calculer l'aire d'un trapèze scalène quand on connaît la mesure des quatre côtés.

[**Attention**, notez qu'il y a une erreur dans le schéma proposé. La mesure du segment complètement à droite de la figure devrait être 15 et non 13.]

1) [2 pts] À partir du texte, reconstituez numériquement les différentes étapes de l'algorithme utilisé pour calculer l'aire du trapèze.

Essayons maintenant de déterminer une formule générale et de la démontrer. Nous noterons la longueur des bases parallèles b_1 et b_2, respectivement, et celles des deux autres côtés du trapèze d_1 et d_2. On suppose que $b_2 > b_1$ et $d_2 > d_1$.

Vous constaterez que le principe de la méthode exposée ici repose sur la détermination de la hauteur h du trapèze et de la décomposition de la plus grande base b_2 en quatre parties : $b_2 = b_1 + 2a + c$.

2) [3 pts] En utilisant le théorème de Pythagore, calculez a, c et h.
   [Pour simplifier les expressions, on notera $B = b_2 - b_1$ et $D = d_2^2 - d_1^2$.]

3) [2 pts] À partir de ces quantités, écrivez, sous la forme la plus consise possible, une seule formule générale permettant de calculer l'aire d'un trapèze scalène dont les côtés sont b_1, b_2, d_1 et d_2 (tel qu'indiqué plus haut).

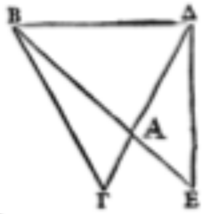
4) [3 pts] Discutez les similarités et différences de style et de méthode entre le texte du papyrus et ceux qu'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide.

ANNEXES

ANNEXE 1 – Euclide.

PROPOSITION XV.

Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels ; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.



Soient les triangles égaux ABΓ, AΔE, ayant un angle égal à un angle, l'angle BAΓ égal à l'angle ΔAE ; je dis que les côtés des triangles ABΓ, AΔE, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΓA est à AΔ comme EA est à AB.

Plaçons ces triangles de manière que ΓA soit dans la direction de AΔ ; la droite EA sera dans la direction de AB (14. 1). Joignons BΔ.

Puisque le triangle ABΓ est égal au triangle AΔE, et que ABΔ est un autre triangle, le triangle ΓAB est au triangle BAΔ comme le triangle AΔE est au triangle BAΔ (7. 5). Mais le triangle ΓAB est au triangle BAΔ comme ΓA est à AΔ (1. 6), et le triangle EAΔ est au triangle BAΔ comme EA est à AB ; donc ΓA est à AΔ comme EA est à AB (11. 5) ; donc les côtés des triangles ABΓ, AΔE, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Mais que les côtés des triangles ABΓ, AΔE soient réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΓA soit à AΔ comme EA est à AB ; je dis que le triangle ABΓ est égal au triangle AΔE.

Joignons encore BΔ. Puisque ΓA est à AΔ comme EA est à AB, que ΓA est à AΔ comme le triangle ABΓ est au triangle BAΔ (1. 6), et que EA est à AB comme le triangle EAΔ est au triangle BAΔ, le triangle ABΓ est au triangle BAΔ comme le triangle EAΔ est au triangle BAΔ (11. 5) ; donc chacun des triangles ABΓ, AΔE a la même raison avec le triangle BAΔ ; donc le triangle ABΓ est égal au triangle EAΔ (9. 5). Donc, etc.

ANNEXE 2 – Papyrus d'Ayer.

Edgar J. Goodspeed, "The Ayer Papyrus," *The American Mathematical Monthly,* Vol. 10, No. 5 (May, 1903), pp. 133-135.

« Soit donné un trapèze scalène tel que celui dessiné plus bas, selon les conditions du problème [c'est-à-dire qu'on ne connait que la longueur des côtés 2, 13, 14 et 15]. Le 13 au carré égale 169, et le 15 au carré égale 225. Retirer le 169; le reste est 56. Retirer le 2 du côté supérieur du 16 de la base; le reste est 14. Prendre 1/14 de 56; c'est 4. Cela retiré du 14 laisse 10. La moitié de ceci égale 5. Ceci au carré égale 25. Retirer ceci du 169; le reste est 144, dont la racine est 12. Ceci par le 5 de la base égale 60, dont la moitié est 30; de tant d'acres est la surface de chacun des triangles rectangles. Et le 12 par le 2 du côté supérieur égale 24; de tant d'acres est le rectangle intérieur. Et le 12 multiplié par le 4 de la base égale 48; dont la moitié est 24; de tant d'acres est le triangle obtusange. Suit la figure: »