G. W. Leibniz

Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas

["Aperçu d'une nouvelle analyse concernant la science de l'infini appliquée aux sommes et aux quadratures"]

Acta eruditorum, mai 1702.

* *
*

Il y a dans le calcul infinitésimal entre les *Différences* et les *Sommes* la même réciprocité qu'en Algèbre entre les *Puissances* et les *Racines*, et tout comme en Algèbre, science générale de la quantité finie, l'objectif principal est d'*extraire les racines* des expressions, il est pour la science de l'infini, de *trouver les sommes* des séries [20] ; or lorsqu'elles sont composées de termes continûment croissants, élément par élément, ces sommes ne sont autres que des quadratures, autrement dit des aires de figures. Si la valeur des racines ne fait apparaître que des termes connus, ces racines sont *pures*, mais lorsqu'elles interviennent elles-mêmes avec une certaine puissance dans l'expression qui en donne la valeur, elles sont *affectées* ; de la même manière, les expressions à sommer ou bien sont purement et simplement données, ou bien renferment elles-mêmes la somme cherchée [21], par exemple $dy = \frac{yxdx}{ax + yy}$ faisant intervenir la somme inconnue y dans le dy qu'il faut sommer. Dans les deux cas le problème délicat (problème que les notions en usage ne permettent pas de résoudre) consiste à ramener les expressions affectées à des expressions pures, c'est-à-dire s'agissant du calcul infinitésimal, *ramener les équations différentielles* de degré quelconque (différentielles, différentio-différentielles, etc.) *à des quadratures*, et ainsi, en postulant ces dernières, à déterminer une courbe à partir d'une propriété de ses *tangentes* ou de ses *osculations* de tous ordres. Quant aux quadratures à leur tour, il serait essentiel, *c'est ce que je vais faire*, d'en ramener les plus complexes à d'autres plus simples. Voilà en quoi consiste l'analyse Tétragonistique dans laquelle j'ai fait, au bout de longues années, quelques progrès. Car à peine avais-je découvert ma Quadrature Arithmétique, en réduisant la quadrature du cercle à une quadrature rationnelle et en remarquant que la somme $\int \frac{dx}{1 + xx}$ dépend de la quadrature du cercle [22], j'ai très vite observé qu'une fois réduites à la sommation d'une expression rationnelle, toutes les quadratures peuvent du même coup se ramener en définitive à certains types de sommation très simples. Je vais montrer grâce à un procédé de Décomposition d'un genre nouveau pourquoi il doit toujours en être ainsi. Ce procédé consiste à *convertir un produit de facteurs en une Somme*, c'est-à-dire à transformer une fraction ayant un dénominateur de degré aussi élevé qu'on veut, égal à un produit de racines, en une somme de fractions ne possédant que des dénominateurs simples. Je nomme ici *rationnelle* toute quantité ou expression dans laquelle l'indéterminée, par exemple ici x, apparaît hors de tout radical [23], indépendamment du fait que les constantes soient rationnelles ou sourdes.

Soit une quelconque expression finie rationnelle :

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma xx + \partial x^3 + \dots}{\lambda + \mu x + \xi xx + \pi x^3 + \dots}$$

Une fois ôtés les termes non fractionnaires, je prétends pouvoir montrer qu'une telle expression est égale à une somme de fractions ayant pour Numérateur une constante, ne faisant pas intervenir x, et un dénominateur simple, c'est-à-dire toutes de la forme $\frac{a}{x + b}$. Voici comment nous pouvons y parvenir. Grâce à l'Algèbre je suppose connus, de quelque manière que ce soit, les diviseurs simples de toute expression rationnelle non fractionnaire, car ils ne sont ni plus ni

moins que les racines qu'on obtiendrait en considérant la formule comme une équation. Par exemple l'expression $xx - \frac{ax}{b} + ab$, a pour diviseurs $x - a$ et $x - b$ [24], et si cette formule était une équation, c'est-à-dire égale à 0, ces deux racines seraient elles-mêmes égales à 0, x vaudrait donc a ou b [25]. Ainsi en admettant la résolution Algébrique des équations, nous disposons des diviseurs des formules ; mon Analyse infinitésimale suppose l'Analyse Algébrique comme le supérieur suppose l'inférieur [26]. Soit au dénominateur l'expression :

$\pi x^3 + \xi xx + \mu x + \lambda$, ou une autre plus élevée ; en la divisant au besoin par π nous obtiendrons $x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}$. Supposons que ses diviseurs soient $x + b$, $x + c$, $x + d$ etc. que j'appelle en abrégé l, m, n etc. Nous pourrons donc décomposer la fraction de départ

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta x}{\pi} + \frac{\gamma xx}{\pi} + \frac{\partial x}{\pi}}{x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}}$$

en les fractions suivantes $\frac{\alpha:\pi}{lmn} + \frac{\beta x:\pi}{lmn} + \frac{\gamma xx:\pi}{lmn} + \frac{\partial x^3:\pi}{lmn}$.

Or je dis qu'elles peuvent toutes se réduire à une fraction semblable à la première $\frac{\alpha:\pi}{lmn}$. Commençons par décomposer celle-ci, je montrerai ensuite comment les autres s'y ramènent.

En négligeant la constante du Numérateur, qui ne change rien aux sommations, tâchons de décomposer les fractions $\frac{1}{lm}$, $\frac{1}{lmn}$, $\frac{1}{lmnp}$

etc., et plus généralement $\frac{1}{lmnpq}$, avec comme je l'ai dit, $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e$, $q = x + f$, ainsi de suite. Cela posé, j'ai obtenu, comme chacun pourra aisément le démontrer en faisant le calcul [27] :

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m}$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{(c-b)(d-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)n}$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)n} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)p}$$

et ainsi de suite. En effet la progression uniforme et régulière à l'infini saute aux yeux. Il suffit de traiter par exemple le premier cas, et chacun pourra s'en convaincre aisément en en faisant l'essai :

$$\frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(-b-c)m} = \frac{bm - cm + cl - bl}{2bc - bb - cclm}.$$

En remplaçant alors au numérateur l et m par leurs valeurs x + b et x + c, il viendra :

$bm - cm + cl - bl = bx + bc - cx - cc + cx + cb - bx - bb =$ (puisque les termes où figure l'indéterminée x s'éliminent)

$2bc - bb - cc$; nous aurons donc :

$$\frac{bm - cm + cl - bl}{(2bc - bb - cc)lm} = \frac{2bc - bb - cc}{(2bc - bb - cc)lm} = \frac{1}{lm}$$ comme je l'avançais. Je dois à présent ramener toutes les Fractions $\frac{x}{lmn\ldots}$, $\frac{xx}{lmn\ldots}$, $\frac{x^3}{lmn\ldots}$ dont le numérateur n'est pas une constante, à des fractions ayant un numérateur du même type que $\frac{a}{lmn}$. J'ai donc trouvé les *Règles universelles pour réduire les Fractions à Numérateurs non constants ne comportant pas de valeurs entières de la variable, à des Fractions à numérateur constant.*

$l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e \ldots$

$$\frac{x}{l\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b}{l\ldots}$$

$$\frac{xx}{lm\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b+c}{m} + \frac{bb}{lm\ldots}$$

$$\frac{x^3}{lmn} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b+c+d}{n\ldots} + \frac{bb+cc+bc}{mn\ldots} - \frac{b^3}{lmn\ldots}$$

$$\frac{x^4}{lmnp\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{(b+c+d+e)}{p\ldots} + \frac{(bb+cc+dd+bc+bd+cd)}{np\ldots} - \frac{b^3+c^3+bbc+bcc}{mnp\ldots} + \frac{b^4}{lmnp\ldots}$$

Les points ... représentent les lettres manquantes, nous pouvons donc quand il le faut les remplacer par celles-ci. Par exemple si $\frac{x}{l\ldots}$ est mis pour $\frac{x}{lmn}$, au lieu de $\frac{x}{l\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b}{l\ldots}$ nous aurons

$$\frac{x}{lmn} = \frac{1}{mn} - \frac{b}{lmn}.$$

Séries donnant les Règles pour décomposer les fractions à Numérateur non constant, comportant des valeurs entières de la variable, en leurs valeurs entières et en Fractions à Numérateur constant.

$$\frac{xx}{l} = x - b + \frac{bb}{l}$$

$$\frac{x^3}{lm} = x - \frac{b+c}{l} + \frac{bb+cc+bc}{m} - \frac{b^3}{lm}$$

$$\frac{x^4}{lmn} = x - \frac{b+c+d}{l} + \frac{bb+cc+dd+bc+bd+cd}{n} - \frac{b^3+c^3+bcc+bbc}{mn} + \frac{b^4}{lmn}$$

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{lm} = xx - \frac{b+c}{l}x + \frac{bb+cc+bc}{l} - \frac{b^3+c^3+bcc+bbc}{m} + \frac{b^4}{lm}$$

La progression à l'infini dans chaque série et des séries entre elles est évidente, surtout si nous les disposons en colonnes. Dans chaque terme, le Numérateur constant est la Formule complète de toutes les combinaisons de lettres pour un degré déterminé, formule d'autant plus simple qu'elle n'est assortie d'aucun coefficient. Ainsi bb+cc+dd+bd+bc+cd est la formule complète du second degré, formée des lettres b, c, d, sans coefficients, elle est donc égale à la somme de leurs carrés et de leurs produits, qui est une constante.

Si nous voulons remplacer l, m, n, p etc. par leurs valeurs x + b, x + c, x + d, x + e, etc. les Théorèmes précédents demeurent valables, comme le montrent les exemples suivants :

$$\frac{1}{\begin{array}{ccccc} x^4 + & bx^3 + & bcxx + & bcdx + & bcde \\ & c & bd & bce & \\ & d & be & bde & \\ & e & cd & cde & \\ & & ce & & \\ & & de & & \end{array}} \quad \text{est égal à :}$$

$$\frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)(x+b)} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)(x+c)} + \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)(x+d)} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)(x+e)}$$

Et $$\frac{x^3}{\begin{array}{ccccc} x^4 + & bx^3 + & bcxx + & bcdx + & bcde \\ & c & bd & bce & \\ & d & be & bde & \\ & e & cd & cde & \\ & & ce & & \\ & & de & & \end{array}} \quad \text{est égal à :}$$

$$\frac{1}{x+e} - \frac{b+c+d}{\begin{array}{ccc} xx + & dx + & de \\ & e & \end{array}} + \frac{bb+cc+bc}{\begin{array}{cccc} x^3 + & cxx + & cdx + & cde \\ & d & ce & \\ & e & de & \end{array}}$$

$$- \frac{b^3}{\begin{array}{ccccc} x^4 + & bx^3 + & bcxx + & bcdx + & bcde \\ & c & bd & bce & \\ & d & be & bde & \\ & e & cd & cde & \\ & & ce & & \\ & & de & & \end{array}}$$

Resterait, mais ce serait trop long ici, à décomposer chaque fraction semblable à celle du deuxième exemple, à l'exprimer à son tour en fractions simples, semblables à celles du premier, et à donner ainsi une nouvelle série de Théorèmes exprimant les fractions du type $\frac{x}{lmnp}$, $\frac{xx}{lmnp}$, $\frac{x^3}{lmnp}$ en une somme de fractions simples, comme nous l'avons fait pour $\frac{1}{lmnp}$.

Tout ceci montre donc bien que nous pouvons décomposer n'importe quelle Fraction Rationnelle en Fractions rationnelles simples à Numérateur constant, rationnelles s'entend par rapport à la variable x qui ne doit pas apparaître sous un radical. Ainsi, si nous devions décomposer une fraction comme $\frac{2xx + x\sqrt{2} + \sqrt{5}}{xx + 2x + \sqrt{3}}$, ou l'une des fractions simples apparaissant au cours de cette décomposition, par exemple $\frac{\sqrt{2}}{x + \sqrt{3}}$, nous les considérons dans une Analyse de ce type comme des fractions rationnelles, puisque l'Analyse des sommations ne se soucie pas des irrationalités qui n'enveloppent pas les variables. Ce en quoi la réduction des grandeurs irrationnelles en rationnelles est ici plus aisée que dans le Calcul *Diophantien* des Nombres Figurés. Il en résulte que même si les Racines sont irrationnelles, pourvu qu'elles soient réelles et non imaginaires, lorsqu'on fait la somme de Séries Numériques rationnelles de degré déterminé, c'est-à-dire où la variable n'apparaît pas dans l'exposant, nous pouvons toujours nous ramener à une somme de nombres en progression Harmonique ou de leurs puissances. Ou encore, lorsque ces dernières s'éliminent, nous parvenons à une constante, c'est-à-dire à une somme absolue, ou du moins à une série de termes non fractionnaires que nous pouvons toujours sommer au moyen de termes rationnels de degré déterminé [28], en considérant une partie finie de la série [29]. Par ailleurs, lorsque nous sommons des séries d'ordonnées rationnelles, autrement dit dans les quadratures de Figures algébriques rationnelles, nous pouvons toujours tout ramener, lorsque les racines sont réelles, à la Quadrature de l'Hyperbole. Par conséquent (pour traiter d'abord ce cas), dans la sommation des séries Numériques, le problème revient à faire la somme de tous les $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{yy}$ ou $\frac{1}{y^3}$ etc., avec $y = x + e$, $x + 2$, $x + \sqrt{3}$ ou autre. Car si x vaut 1, 2, 3 etc. et si e représente la constante 2, la série des nombres $\frac{1}{x+e}$ c'est-à-dire la série des $\frac{1}{y}$ sera $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{2+2}$, $\frac{1}{3+2}$, $\frac{1}{4+2}$ etc. Si au contraire x vaut 1, 3, 5, 7 etc., et la constante e $\sqrt{3}$, la série de tous les $\frac{1}{y}$ sera alors $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{5+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{7+\sqrt{3}}$ etc., c'est-à-dire que si x et y sont en progression Arithmétique, naturelle ou non, les $\frac{1}{y}$ seront en progression harmonique et donc $\int\frac{dy}{y}$ sera une somme de Nombres en progression

Harmonique, tandis que $\int\frac{dy}{yy}$ et $\int\frac{dy}{y^3}$ etc. seront les sommes de termes d'une progression Harmonique élevés à une certaine puissance. Tels sont les résultats obtenus lorsqu'il s'agit de sommer des séries numériques rationnelles de degré déterminé, finies ou éventuellement infinies, et que l'expression fractionnaire ne comporte que des racines réelles. Or, même si une série Harmonique comportant une infinité de termes est également de grandeur infinie, et par conséquent ne peut être sommée (à l'inverse des séries de termes harmoniques élevés à une puissance) [30], il peut arriver que la différence entre deux séries en progression harmonique même infinies, constitue une quantité finie. Et, ce que je trouve remarquable, lorsque nous tombons sur une somme tout achevée, sans avoir à sommer ni termes harmoniques ni leurs puissances, mon analyse permet d'éliminer les séries harmoniques ou autres séries plus incommodes, et de faire apparaître directement la somme. Prenons par exemple la série

$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ etc. en totalité à l'infini, c'est-à-dire $\int\frac{dx}{xx-1}$ avec $x = 2, 3, 4$ etc., et ici $dx = 1$, nous pouvons en faire la somme. Dans les séries Numériques en effet les différences sont assignables. En appliquant la règle que j'ai donnée $\frac{1}{xx-1}$ (qui est de la forme $\frac{1}{lm}$ avec $l = x+1$ et $m = x-1$, donc b égal à 1 et c à -1), sera

$$\frac{1}{-2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)} \text{ soit } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right);$$

or $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$ est égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ etc.}\right)$ et $-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$ est égal à $\frac{1}{2}\left(\ldots-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\text{ etc.}\right)$ par conséquent $\int\frac{dx}{xx-1}$ sera égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

Nous obtiendrons finalement $\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.}$ Je me souviens avoir déjà donné autrefois cette sommation en même temps que ma Quadrature Arithmétique. Une méthode semblable permet de découvrir les autres sommes de séries rationnelles de degré déterminé, décomposables en termes réels, ou de les ramener à des séries harmoniques et à leurs puissances. Je vais parler dans un instant de la décomposition imaginaire, tout aussi utile. Nous pouvons même souvent procéder de manière semblable pour les séries rationnelles de degré indéterminé.

Supposons à présent que x et y ne soient plus des termes discrets mais continus, c'est-à-dire non plus des nombres séparés par une distance assignable, mais des segments d'abscisse continûment croissants, élément par élément, autrement dit croissants par intervalles inassignables, de sorte que leur série constitue une figure. Il est clair que de la même façon, toutes les sommes de fractions rationnelles de degré constant, c'est-à-dire toutes les Quadratures de figures rationnelles Algébriques, à supposer que les *Racines* du dénominateur soient *réelles*, peuvent être soit établies complètement soit reconduites à la Quadrature de l'Hyperbole. Car en dehors des sommes de termes non fractionnaires comme $\int dx$, $\int xdx$, $\int xxdx$ etc., nous sommes conduits à des sommations simples, comme $\int\frac{dy}{y}$, $\int\frac{dy}{yy}$, $\int\frac{dy}{y^3}$ etc., avec $y = x + e$; or nous pouvons toujours calculer des quadratures telles que $\int\frac{dy}{yy}$, $\int\frac{dy}{y^3}$ etc., il ne subsiste donc plus que $\int\frac{dy}{y}$, soit la Quadrature de l'Hyperbole. Mais à vrai dire la Nature, mère des diversités éternelles, ou plutôt l'esprit Divin, sont trop jaloux de leur merveilleuse variété pour permettre qu'un seul et même modèle puisse dépeindre toutes choses. C'est pourquoi ils ont inventé cet expédient élégant et admirable, ce miracle de l'Analyse, prodige du monde des idées, objet presque amphibie entre l'Etre et le Non-être, que nous appelons racine imaginaire [31]. Ainsi chaque fois que le dénominateur

d'une Fraction Rationnelle admet des racines imaginaires, ce qui peut arriver de quantité de façons, l'Hyperbole dont on devrait connaître la Quadrature, deviendrait elle aussi imaginaire, et il n'y aurait aucun moyen de la construire. Mais toutes les Racines imaginaires possèdent leurs propres symétriques [32], car elles apparaissent lorsqu'on extrait une racine carrée, or toute extraction d'une racine carrée est double, et son signe $\sqrt[2]{\ldots}$ peut être précédé de + ou de – ; par conséquent lorsqu'on multiplie comme il faut deux racines imaginaires, on obtient un produit réel, qui sera ou bien le dénominateur lui-même, auquel cas (lorsque la fraction a été réduite à un numérateur constant et qu'on a éliminé par exemple le second terme dans l'Expression du dénominateur) [33] la quadrature ne peut pas être décomposée plus simplement, ou bien un diviseur réel du dénominateur, permettant de ramener la quadrature cherchée à une autre plus simple, de même type que celle du cercle. Soit par exemple la fraction $\frac{1}{x^4 - 1}$, les racines du dénominateur sont de toute évidence $x + 1$, $x - 1$, $x + \sqrt{-1}$, $x - \sqrt{-1}$, leur produit fait $x^4 - 1$, et en appliquant notre méthode :

$$+\frac{1}{(-1-1)(+\sqrt{-1}-1)(-\sqrt{-1}-1)(x+1)}$$
$$+\frac{1}{(+1+1)(+\sqrt{-1}+1)(-\sqrt{-1}+1)(x-1)}$$
$$+\frac{1}{(+1-\sqrt{-1})(-1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})}$$
$$+\frac{1}{(+1+\sqrt{-1})(-1+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})} =$$
$$\frac{1}{x^4-1} =$$
$$-\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1})} - \frac{1}{4\sqrt{-1}(x-\sqrt{-1})}$$

où $\int \frac{dx}{x+1}$ et $\int \frac{dx}{x-1}$ ressortissent à la Quadrature de l'Hyperbole, tandis que $\int \frac{dx}{x\sqrt{-1}-1}$ et $\int \frac{dx}{x\sqrt{-1}+1}$ ne peuvent être rapportées qu'à une Hyperbole imaginaire. En regroupant entre elles autant de racines imaginaires qu'il le faut pour obtenir une expression réelle [34], c'est-à-dire ici en faisant la somme des deux dernières fractions, à savoir : $\frac{1}{4x\sqrt{-1}-4} - \frac{1}{4x\sqrt{-1}+4}$, nous obtiendrons

$$\frac{4(x\sqrt{-1}+1 - x\sqrt{-1}+1)}{4(x\sqrt{-1}-1)4(x\sqrt{-1}+1)} \text{ soit } -\frac{1}{2(xx+1)}.$$

Si nous voulions de la même façon additionner $-\frac{1}{4(x+1)}$ et $\frac{1}{4(x-1)}$ nous obtiendrions $\frac{1}{2(xx-1)}$, et en additionnant $\frac{1}{2(xx-1)} - \frac{1}{2(xx+1)}$ nous retrouverions $\frac{1}{x^4-1}$ qui est donc égal à :

$$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(xx+1)}.$$

Il est donc clair que $\int \frac{dx}{x^4-1}$ et par suite $\int \frac{dx}{1-x^4}$ dépendent en même temps de la Quadrature de l'Hyperbole et de celle du Cercle. Il était déjà bien connu que $\int \frac{dx}{x-1}$ et $\int \frac{dx}{x+1}$, donc également $\int \frac{dx}{xx-1}$ se rattachaient à la Quadrature de l'Hyperbole ; mais je fus le premier à découvrir, en même temps que ma Quadrature Arithmétique, que $\int \frac{dx}{xx+1}$ se rapportait à la Quadrature du Cercle, j'en ai déduit le Théorème publié dans les commencements des Actes de Leipzig : si le diamètre a pour carré 1, l'Aire du Cercle est $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. Il résulte de tout ceci que lorsque le Dénominateur intervenant dans l'ordonnée a des diviseurs réels du premier degré de la forme x+e, toutes les quadratures de Figures Algébriques rationnelles peuvent se ramener à celle de l'Hyperbole, en revanche lorsque le dénominateur a des diviseurs réels

plans, c'est-à-dire du second degré (qui naturellement sont eux-mêmes dépourvus de racines réelles, sinon elles conduiraient à des quadratures directes), de la forme $xx + fx + ag$, ou, après élimination du second terme, $xx \pm ae$, la quadrature dépend de la Quadrature de l'Hyperbole, de celle du cercle, ou de l'une et l'autre.

Nous sommes donc logiquement conduits à la Question la plus importante : toutes les Quadratures rationnelles peuvent-elles se ramener à celle de l'Hyperbole et du Cercle, question qui dans l'Analyse que je suis en train de mener, peut se formuler ainsi : toute Equation Algébrique, autrement dit, toute expression réelle entière, rationnelle par rapport à l'indéterminée peut-elle se décomposer en diviseurs réels simples ou plans ? Or j'ai compris qu'en jugeant qu'il en va ainsi nous restreindrions abusivement les richesses de la nature. Par exemple en multipliant $\frac{1}{xx + aa\sqrt{-1}}$ par $\frac{1}{xx - aa\sqrt{-1}}$ nous obtiendrons $\frac{1}{x^4+a^4}$, le dénominateur a bien une expression réelle, mais en décomposant cette formule nous n'aboutissons pas à des diviseurs réels plans, car la décomposition de $xx\text{-}aa\sqrt{-1}$ est $x + a\sqrt{\sqrt{-1}}$ et $x - a\sqrt{\sqrt{-1}}$ et celle de $xx + aa\sqrt{-1}$ est $x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}$ et $x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}$. En multipliant

$$x + a\sqrt{\sqrt{-1}},\ x - a\sqrt{\sqrt{-1}},\ x + a\sqrt{-\sqrt{-1}},\ x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

nous retrouvons donc bien l'expression $x^4 + a^4$, mais de quelque façon que nous combinions deux de ces quatre racines, nous ne pouvons jamais faire que leur produit donne une quantité réelle, soit un diviseur réel plan [35]. Ainsi mon analyse ne parvient à rattacher $\int \frac{dx}{x^4+a^4}$ ni à la quadrature du Cercle ni à celle de l'Hyperbole, et cette quadrature pose le principe d'une nouvelle quadrature originale. Néanmoins (je me rappelle avoir été déjà conduit à cette idée) tout comme la Quadrature de l'Hyperbole $\int \frac{dx}{x+a}$, c'est une chose bien connue, fournit les

Logarithmes, autrement dit la *Section du rapport*, et $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ la *Section de l'Angle*, j'espère que nous pourrons continuer cette progression et établir à quels problèmes correspondent

$$\int \frac{dx}{x^4 + a^4}, \int \frac{dx}{x^8 + a^8}, \text{ etc.}$$

Notons en passant que les $\int \frac{x^{e-1}.dx}{x^{2e} \pm a^{2e}}$, par exemple $\int \frac{x.dx}{x^4 \pm a^4}$, $\int \frac{xx.dx}{x^6 \pm a^6}$ et $\int \frac{x^3.dx}{x^8 \pm a^8}$, ainsi de suite, dépendent de la Quadrature de Cercle si ± représente un +, et de la Quadrature de l'Hyperbole s'il représente un –; on le voit aisément quand on est familier du calcul différentiel, bien qu'on puisse également le déduire de l'Analyse que je viens d'exposer [36].

Pour l'essentiel il ne reste donc plus qu'à chercher si nous pouvons ramener, et de quelle manière, les Figures ayant des ordonnées irrationnelles à d'autres rationnelles, isométriques [37] (c'est-à-dire telles que la connaissance de la quadrature de l'une fournisse, directement ou par l'intermédiaire d'un rapport, la quadrature de l'autre) et les soumettre à mon Analyse. J'ai fait en cette voie de nombreuses tentatives, non sans résultats, néanmoins je n'oserais rien promettre de suffisamment général ni d'extraordinaire et à dire vrai je n'ai pas eu le temps de traiter la question comme elle le méritait. C'est la raison pour laquelle j'avais différé la publication de ma Méthode, jusqu'à ce que j'eusse le loisir de progresser davantage dans la réduction des sommations irrationnelles aux sommations rationnelles, et je réservais la totalité de cette théorie pour mon ouvrage sur la *Science de l'Infini*. Mais je me rendais compte que ce délai retardait les progrès de la science et que je ne pouvais toujours pas bien disposer de mon temps, j'ai donc préféré œuvrer à l'intérêt commun, avec l'espoir que d'autres étendraient les germes de ma nouvelle théorie et en récolteraient des fruits plus vermeils que moi, surtout s'ils s'attachaient plus sérieusement qu'on ne l'a fait jusqu'ici à développer

l'Algèbre *Diophantienne* [38], pratiquement abandonnée par les disciples de *Descartes* qui n'en distinguaient guère l'usage en Géométrie. Quant à moi, au contraire, je me souviens avoir plusieurs fois indiqué (ce qui pouvait paraître surprenant) que les progrès de notre Analyse infinitésimale sur le chapitre des quadratures, dépendaient en grande partie des progrès de l'Arithmétique que Diophante fut, si je ne m'abuse, le premier à aborder dans ses ouvrages. Et j'espère que ce que je viens d'exposer, en montrant pourquoi il fallait lui faire confiance, rendra plus convaincante mon exhortation à poursuivre en cette voie.