Topologie et Calcul Différentiel
L3 MASS U1CD35
Partiel du 4 Novembre 2010

Durée: 2h30. L'usage de tout document, calculatrice ou téléphone est interdit.

Le barême indiqué ci-dessous peut faire l'objet de modifications.

Tout calcul ou résultat doit être rigoureusement justifié. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 *(Questions de cours, 3 points)*

1. Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Donner la définition de la norme subordonnée sur l'espace des applications linéaires continues $L_c(E, F)$.
2. Donner *deux* définitions (équivalentes) d'un espace connexe.
3. Existe-t-il des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas uniformément continues ? Si oui, donner un exemple.
4. Existe-t-il des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas uniformément continues ? Si oui, donner un exemple.
5. Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2 *(9 points)*

Soit (E, d_E) un espace métrique. Pour toute partie A non-vide de E, et tout $x \in E$, on définit la *distance de x à A* par

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d_E(x, y). \tag{1}$$

1. On suppose *dans cette question seulement* que $E = \mathbb{R}$ (la distance étant donnée par la valeur absolue de la différence). Donner un exemple de point x et de partie A tels que la borne inférieure dans (1) n'est pas atteinte.
2. Soit A un fermé non-vide de E. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in A$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.
3. Soit A un compact non-vide de E. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d_E(x, a)$.

4. Soient K_1 et K_2 deux compacts non-vides de E. On introduit

$$\rho(K_1, K_2) := \sup_{x \in K_1} d(x, K_2).$$

Montrer qu'il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $\rho(K_1, K_2) = d_E(x_1, x_2)$.

5. Montrer que $\rho(K_1, K_2) = 0$ si et seulement si $K_1 \subset K_2$.

6. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties compactes non-vides de E. Montrer que l'application

$$\delta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}_+, \quad \delta(K_1, K_2) = \max(\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1))$$

définit une distance sur $\mathcal{E}$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ à coefficients réels. On rappelle que la norme $\| \|_1$ sur $\mathbb{R}^2$ est définie par

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

1. On note, pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_S = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}.$$

Rappeler pourquoi $\| \|_S$ est une norme sur $M_2(\mathbb{R})$.

2. On pose $\alpha = \max(|m_{11}| + |m_{21}|, |m_{12}| + |m_{22}|)$.
   (a) Montrer que $\|M\|_S \leq \alpha$.
   (b) Trouver un vecteur x tel que $\|Mx\|_1 = \alpha \|x\|_1$. En déduire $\|M\|_S = \alpha$.
   Indication: distinguer deux cas.

3. On note, pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_F := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq 2} |m_{ij}|^2}.$$

Montrer que $\|\|_F$ est une norme sur $M_2(\mathbb{R})$ (il s'agit de la norme de *Frobenius*).
Indication: Identifier $M_2(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^4$.

4. Montrer qu'il existe $c, C > 0$ tels que: pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$c\,\|M\|_S \;\leq\; \|M\|_F \;\leq\; C\,\|M\|_S.$$

5. Calculer $\| \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \|_F$. En déduire qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que: pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_F \;:=\; \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}.$$

Exercice 4 *(6 points)*

On note $E = C^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

1. On note, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

   Montrer que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}_n \;:=\; \{P_{|[0,1]},\ P \text{ polynôme de degré } \leq n\}$. Calculer l'adhérence de $\mathcal{P}_n$ dans E.

3. Calculer l'intérieur de $\mathcal{P}_n$ dans E.

4. Soit $\mathcal{P}'_n \;:=\; \{P \in \mathcal{P}_n,\ P(1/2) \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{P}'_n$ est un ouvert de $\mathcal{P}_n$. Est-ce un ouvert de E ?

5. Déterminer les composantes connexes de $\mathcal{P}'_n$.