Quelques exercices

Exercice 1. Soit X, Y deux champs de vecteurs lisses complets dans une variété différentielle M. Supposons que

$$[X, Y] = -X$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$e_*^{-tX} Y = Y - tX$$

Exercice 2. Soit dans $\mathbb{R}^3$ les champs de vecteurs :

(a) (Heisenberg)

$$X = \partial_x, \quad Y = \partial_y + x\partial_z$$

(b) (Martinet)

$$X = \partial_x, \quad Y = \partial_y + \frac{x^2}{2}\partial_z$$

(c) (Isoperimetric with non-smooth abnormal extremals)

$$X = \partial_x - x\frac{y^2}{4}\partial_z, \quad Y = \partial_y + y\frac{x^2}{4}\partial_z$$

Pour chaque exemple :

1. Démontrer que $D = \text{span}\{X, Y\}$ satisfait $\dim \text{Lie}_q D = 3$ en tout point $q = (x, y, z)$. Déterminer combien de crochets sont nécessaires pour engendrer l'espace tangent en fonction de q.
2. Trouver une forme différentielle ω telle que $D = \ker \omega$. Calculer $\omega \wedge d\omega$. Dans quels points $\omega \wedge d\omega$ s'annulle ?
3. Déterminer si les structures sous-riemannienne correspondantes admettent des extremales anormales. Sont-ils toujours lisses ?

Exercice 3. Soit f_1, f_2, f_3 les champs des vecteurs définies sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ par

$$f_i(q) = \pi_q^\perp(\partial_{x_i}), \qquad q = (x_1, x_2, x_3)$$

où $\pi_q^\perp$ est la projection ortogonale de $\mathbb{R}^3$ sur l'espace tangent à S^2 en q.

1. Écrire explicitement f_i pour $i = 1, 2, 3$.
2. Montrer que la distance sous-riemannienne définie par la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est la distance riemannienne de S^2.

Exercice 4. Soit dans $\mathbb{R}^2$ les champs de vecteurs

$$f_1 = \partial_x, \qquad f_2 = x\partial_y, \qquad f_3 = y\partial_y$$

1. Calculer la norme sous-riemannienne induite par la structure libre engendrée par $\{f_1, f_2, f_3\}$.
2. Est-elle équivalente á une structure définie par deux champs de vecteurs ?

Exercice 5. Soit $g = (g_{ij})_{ij}$ une métrique riemannienne dans $\mathbb{R}^n$ et H l'hamiltonienne dans $\mathbb{R}^{2n}$.

$$H(p, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) p_i p_j$$

Montrer que les équations hamiltoniennes

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

coincident avec les équations géodésiques riemanniennes

Exercice 6. (Grushin) Soit dans $\mathbb{R}^2$

$$f_1 = \partial_{x_1}, \qquad f_2 = x_1 \partial_{x_2}.$$

1. Montrer que l'hamiltonienne sous-riemannienne a la forme

$$H(p, x) = \frac{1}{2}(p_1^2 + x_1^2 p_2^2)$$

2. Montrer que cette structure n'a pas de extremales anormales.
3. Résoudre les équations hamiltoniennes

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

   et trouver toutes les solutions avec conditions initiales $x(0) = (0, 0)$. Dessiner ces trajectoires.
4. Trouver toutes les solutions avec conditions initiales $x(0) = (-1, 0)$. Dessiner ces trajectoires.