Université Pierre et Marie Curie — Année 2013-2014
Licence de Mathématiques — LM372 Algèbre 2

Examen du 14 mai 2014

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la lisibilité, en tous les sens du terme, de la rédaction.

Exercice 1 • Calculer les facteurs invariants du groupe

$$(\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}).$$

Exercice 2 • Dans l'anneau $A = \mathbb{Z}[X]$, on considère l'idéal I engendré par $2X + 1$ et $X + 2$, et on note

$$J = \{P \in A; P(-2) \equiv 0 \pmod 3\}.$$

a) Montrer que J est un idéal de A qui contient I.

b) Montrer que $3 \in I$.

c) Montrer que $I = J$.

d) L'anneau A est-il principal ?

Exercice 3 • Notons M le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^3$ et L le sous-module de M engendré par les vecteurs $(5, -3, 1)$, $(-4, 4, 8)$ et $(8, 0, 28)$.

a) Quel est le rang du $\mathbb{Z}$-module L ? En donner une base.

b) Trouver une base de M adaptée à L.

c) Quelle est la structure du groupe M/L ?

Exercice 4 •

a) Soient M et N deux matrices de dimension $n \leq 3$ sur un corps k. Montrer que si les matrices M et N ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal, elles sont semblables.

b) Montrer que pour $n \geq 4$ ce n'est plus forcément le cas.

Exercice 5 •

a) Factoriser le polynôme $X^5 + 2X^3 + X$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 6, et u un endomorphisme de E tel que $u^5 = -2u^3 - u$.

b) Quelles sont les valeurs possibles du polynôme minimal de u ?

c) Quelles sont les valeurs possibles du polynôme caractéristique de u ?

d) Quelles sont les valeurs possibles de la forme de Jordan d'une matrice de u ?

Corrigé de l'examen du 14 mai 2014

Solution 1 • On commence par décomposer chaque groupe en parties primaires (théorème des testes chinois).

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/45\mathbb{Z} &\simeq (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})\\ \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} &\simeq (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\\ \mathbb{Z}/50\mathbb{Z} &\simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})\end{aligned}$$

et on rassemble les plus grandes puissances de chaque facteur premier, soit

$$(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/3600\mathbb{Z})$$

puis celles qui restent

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}).$$

Les facteurs cherchés sont donc 30 et 3600.

Solution 2 •

a) L'application $P \mapsto P(-2)$ est un morphisme d'anneaux de A dans $\mathbb{Z}$. L'image réciproque J de l'idéal $3\mathbb{Z}$ est donc un idéal de A. En posant $S = 2X + 1$ et $T = X + 2$, on a $S(-2) = -3 \in 3\mathbb{Z}$ et $T(-2) = 0 \in 3\mathbb{Z}$, donc $S, T \in J$. L'idéal I engendré par S et T est donc inclus dans J.

b) On a $3 = 2(X + 2) - (2X + 1) = 2T - S$, donc $3 \in I$.

c) Soit $P \in A$. En effectuant la division euclidienne de P par le polynôme unitaire $T = X + 2$ de degré 1, on trouve un polynôme Q et un entier $r \in \mathbb{Z}$ tels que $P = QT + r$. On a alors $P(-2) = r$. Si $P \in J$, alors $r = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z} \subset A$. Comme $3 \in I$ et $T \in I$, on a bien $P = QT + r \in I$. On a donc $J \subset I$. Comme on avait déjà l'autre inclusion, on en déduit $I = J$.

d) **Remarque.** Le fait que I est engendré par deux éléments ne prouve absolument pas qu'il n'est pas principal. Par exemple, dans $\mathbb{Z}$, l'idéal engendré par 6 et 15 est aussi engendré par l'élément unique 3.

Supposons que l'idéal $I = J$ soit principal, engendré par le polynôme $P \in A$. Comme $3 \in I$, on a $3 = PQ$, avec $P, Q \in A$, donc P est de degré 0 : c'est un entier $p \in \mathbb{Z}$. Comme $2X + 1 \in I$, p divise 1, donc $\pm 1 = p \in J$, en contradiction avec la définition de J. L'idéal I n'est pas principal et l'anneau A non plus.

Solution 3 •

a) Appelons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 8 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 28 \end{pmatrix}$$

et appliquons successivement les transformations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 8C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$. Les matrices successives sont

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 8 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 1 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \\ 9 & 44 & 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -8 \\ 9 & 44 & -44 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 9 & 44 & 0 \end{pmatrix}$$

Le module L est de rang 2 et les deux dernières colonnes $f_1 = (1,1,9)$ et $f_2 = (0,8,44)$ de la matrice ci-dessus forment une base de L.

b) Il suffit de poser $e_1 = f_1$, $e_2 = \frac{1}{4}f_2 = (0,2,11)$ et, par exemple, $e_3 = (0,1,6)$. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant 1, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de M. Elle est adaptée à L puisque $f_1 = e_1$ et $f_2 = 4e_2$ forment une base de L.

c) On a

$$M/L \simeq (\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}.$$

Solution 4 •

a) Notons $f_1 \mid \cdots \mid f_r$ (respectivement $g_1 \mid \cdots \mid g_s$ les facteurs invariants de M (respectivement N). Le polynôme minimal commun est $f_r = g_s$ et le polynôme caractéristique commun est le produit $f_1 \dots f_r = g_1 \dots g_s$. Son degré est $n \leq 3$. On a donc $(h =) \prod_{i<r} f_i = \prod_{i<s} g_i$.

Supposons d'abord que le degré de $f_r = g_s$ vaut au moins 2. Cela implique $\deg(h) \leq 1$. On a donc soit $r = s = 1$ et $f_1 = g_1$, soit $r = s = 2$ et $f_1 = g_1 = h$. Si le degré de $f_r = g_s$ vaut 1, tous les f_i et les g_i sont égaux à f_r puisqu'ils divisent f_r. Il y en a donc $r = n = s$. Dans tous les cas, M et N ont mêmes facteurs invariants et sont donc semblables.

b) Pour $n = 4$, le raisonnement fonctionne de la même façon, sauf si $\deg h = 2$ et h a deux écritures distinctes. On peut prendre $h = X^2$, avec $r = 3$, $f_1 = f_2 = X$, $s = 2$, $g_1 = X^2$ et $f_3 = g_2 = X^2$. Voici donc deux matrices possibles de même polynôme minimal (X^2) et caractéristique (X^4) sans être semblables :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 5 •

a) On a $X^5 + 2X^3 + X = X(X^2+1)^2$ et X et X^2+1 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

b) Comme $X^5 + 2X^3 + X$ annule u. Le polynôme minimal P_m de u est un diviseur de degré non nul de $X^5 + 2X^3 + X = X(X^2+1)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il s'écrit donc $X^\alpha (X^2+1)^\beta$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 2$ et $\alpha + \beta > 0$. Il y a cinq possibilités :

$$X, X^2+1, X(X^2+1), (X^2+1)^2 \text{ et } X(X^2+1)^2.$$

c) Le polynôme caractéristique P_c est un multiple de P_m sans autres facteurs irréductibles que P_m et qui est unitaire de degré 6. Il s'écrit donc $X^\alpha(X^2+1)^\beta$ avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + 2\beta = 6$. Il y a quatre possibilités :

$$X^6, X^4(X^2+1), X^2(X^2+1)^2 \text{ et } (X^2+1)^3.$$

d) L'énoncé est ambigu. Chacun des six couples (P_m, P_c) donne une classe de similitude sur $\mathbb{R}$. On peut écrire des représentants sous forme de matrices compagnon sur $\mathbb{R}$ ou de matrices de Jordan sur $\mathbb{C}$. Les deux réponses sont acceptées.

1.
$$X, X^6, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$X^2+1, (X^2+1)^3, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

3.
$$X(X^2+1), X^4(X^2+1), \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

4.
$$X(X^2+1), X^2(X^2+1)^2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

5.
$$(X^2+1)^2, (X^2+1)^3, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

6.
$$X(X^2+1)^2, X^2(X^2+1)^2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}.$$