NM557 Théorie des nombres Loïc Merel
Année 2013-2014 Dominique Bernardi, Pierre Charollois

Feuille 2

Fonction ζ de Dedekind

Exercice 1 Soit n un entier. Pour tout nombre premier p, on note n'_p le plus grand diviseur de n qui n'est pas multiple de p, et f_p l'ordre de p modulo n'_p. On note $g_p = \varphi(n'_p)/f_p$. Montrer que la fonction ζ_{K_n} du corps cyclotomique $K_n = \mathbb{Q}\left(e^{2i\pi/n}\right)$ admet une écriture en produit eulérien

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-f_p s})^{-g_p}$$

valable pour $\Re(s) > 1$.

Exercice 2 Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ un entier sans facteur carré. On note

$$D = \begin{cases} 4d & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ d & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases},$$

le discriminant du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Pour tout nombre premier p, on définit $\chi_D(p) = \left(\frac{D}{p}\right)$ si p est impair et

$$\chi_D(2) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ 1 & \text{si } d \equiv 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{si } d \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$$

et on prolonge χ_D en une fonction complètement multiplicative sur $\mathbb{Z}_{>0}$, puis à $\mathbb{Z}$ en posant $\chi_D(-1) = 1$ si $d > 0$ et -1 sinon. Montrer que le *symbole de Kronecker* $n \mapsto \chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ est un caractère primitif modulo $|D|$.

Montrer que la fonction $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ admet une écriture en produit eulérien analogue à celle de l'exercice précédent. Montrer que

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(s) = \zeta(s) L(\chi_D, s)$$

où la fonction $L(\chi_D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_D(n)}{n^s}$ admet elle-même une écriture en produit eulérien

$$L_D(s) = L(\chi_D, s) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - \chi_D(p)p^{-s})^{-1}.$$

Exercice 3 Soient $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ et $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ deux corps quadratiques distincts. On pose $L = K_1K_2$ leur compositum. Après avoir défini correctement d_3 et D_i pour $1 \leq i \leq 3$, montrer que la fonction zêta du corps L peut s'écrire

$$\zeta_L = \zeta L_{D_1} L_{D_2} L_{D_3}$$

Exercice 4

a) Soit p un nombre premier. Pour $1 \leq k \leq p-2$, on définit χ_k par $\chi_k(n) = e^{2ik\pi/p}$. Montrer que la fonction ζ_{K_p} du p-ième corps cyclotomique peut s'écrire

$$\zeta_{K_p}(s) = \zeta(s) \prod_{k=1}^{p-2} L(\chi_k, s).$$

b) Plus généralement, soit $n > 0$ un entier naturel, et χ un caractère du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. On définit (comment ?) le *conducteur* f de χ et le caractère *primitif* $\tilde{\chi}$ modulo f associé à χ. la fonction ζ_{K_n} du n-ième corps cyclotomique peut s'écrire

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{\chi} L(\tilde{\chi}, s),$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères modulo n.

Nombre de classes des corps quadratiques

Exercice 5 On reprend les notations de l'exercice 2, avec $\chi = \chi_D$.

Notons $\omega = e^{2i\pi/|D|}$ Pour tout a modulo $|D|$, on définit la *somme de gauss*

$$\mathfrak{g}_a(\chi) = \sum_{k \bmod |D|} \chi(k)\omega^{ka}$$

et on note $\mathfrak{g}(\chi) = \mathfrak{g}_1(\chi)$

a) Montrer que $\mathfrak{g}_a(\chi) = \chi(a)\mathfrak{g}(\chi)$ et que $|\mathfrak{g}(\chi)| = \sqrt{|D|}$.

b) Montrer que

$$L(1,\chi) = -\frac{1}{|D|}\sum_{a=1}^{|D|} \mathfrak{g}_a(\chi)\log(1-\omega^{-a})$$
$$= -\frac{\mathfrak{g}(\chi)}{|D|}\left(\sum_{1\le a\le |D|} \chi(a)\log\left(\sin\left(\frac{\pi a}{|D|}\right)\right) + i\frac{\pi}{D}\sum_{1\le a\le |D|}\chi(a)a\right).$$

c) On suppose maintenant $d<0$. Posons $S=\sum_{0<a<|D|} a\chi(a)$. Montrer que

$$(2-\chi(2))S = |D|\sum_{0<a<|D/2|}\chi(a)$$

et en déduire

$$h_K = \frac{w_K}{2(2-\chi(2))}\left|\sum_{0<a<|D/2|}\chi(a)\right|,$$

qui se simplifie en

$$h_K = \frac{1}{(2-\chi(2))}\left|\sum_{0<a<|D/2|}\chi(a)\right|$$

pour $d<-3$ (ou $D<-4$).

d) Calculer les nombres de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, pour $d\in\{-13,-19,-23,-35\}$

Exercice 6 Rappels sur les fractions continues. On définit deux suites de polynômes par $P_{-2}=0$, $P_{-1}=1$, $Q_{-2}=1$, $Q_{-1}=0$, et pour $n\ge 0$

$$\forall n\ge 0,\quad P_n = X_nP_{n-1}+P_{n-2},\quad Q_n = X_nQ_{n-1}+Q_{n-2}.$$

Pour $n\ge 0$, on note $F_n = P_n/Q_n = [X_0,\dots,X_n]$.

a) Montrer que l'on a

$$F_4 = X_0 + \cfrac{1}{X_1+\cfrac{1}{X_2+\cfrac{1}{X_3+\cfrac{1}{X_4}}}}.$$

et $P_nQ_{n+1}-P_{n+1}Q_n = (-1)^{n+1}$.

b) À tout réel θ on associe la suite de ses *quotients complets* θ_i et celle de ses *quotients incomplets* a_i (Cette suite est finie si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$) de la façon suivante : $\theta_0 = \theta$, $a_i = \lfloor \theta_i \rfloor$, $\theta_{i+1} = \frac{1}{\theta_i - a_i}$. Sauf a_0, les a_i sont des entiers naturels non nuls. On pose $p_n = P_n(a_0, \dots, a_n)$, $q_n = Q_n(a_0, \dots, a_n)$. La fraction (irréductible) p_n/q_n est la *réduite d'ordre* n de θ. On a

$$\theta = F_n(a_0, \dots, a_{n-1}, \theta_n).$$

Montrer que la suite des réduites est formée de deux suites adjacentes qui tendent vers θ.

c) Si p_n/q_n et p_{n+1}/q_{n+1} sont deux réduites successives de θ, $|p/q - \theta| < 1/2q^2$ pour $p/q = p_n/q_n$ ou $p/q = p_{n+1}/q_{n+1}$. Réciproquement, si $|p/q - \theta| < 1/2q^2$ p/q est une des réduites de θ.

d) Le développement en fraction continue de θ est périodique si et seulement si θ est un nombre quadratique (réel). On dit qu'un nombre quadratique réel θ est *réduit* si et seulement si $\theta > 1$ et $-1 < \theta' < 0$, où θ' est le conjugué de θ. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres réduits de discriminant donné. Montrer que si θ est quadratique réel, ses quotients complets sont réduits à partir d'un certain rang. En déduire que le développement en fraction continue de θ est périodique si et seulement si θ est un nombre quadratique réel, et qu'il est purement périodique si et seulement si θ est réduit (Galois).

Exercice 7 Soit $d > 0$ un entier qui n'est pas un carré. On considère le développement en fraction continue de $\theta = \sqrt{d}$. Montrer qu'il est de la forme $[a_0, \overline{a_1, \dots, a_r}]$, avec $a_r = 2a_0$.

a) Montrer que si $A = P_{r-1}(a_0, \dots a_{r-1})$ et $B = Q_{r-1}(a_0, \dots, a_{r-1})$, $A + B\sqrt{d}$ est l'unité fondamentale de l'ordre de discriminant d, et que sa norme est $(-1)^r$.

b) On suppose de plus que $d \not\equiv 1 \pmod 4$ est sans facteur carré. Montrer que le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est (ici $D = 4d$) :

$$\frac{\sum_{0<a<D/2} \chi(a) \log\left(\sin\left(\frac{\pi a}{D}\right)\right)}{\log(A + B\sqrt{d})}.$$

c) Calculer les unités fondamentales des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ pour $d \in \{2, 3, 7, 11, 15\}$ et les nombres de classes correspondants.