# Théorie descriptive des ensembles
# Devoir maison n°1

**Exercice 1.** Si $X, Y$ sont des ensembles et $O \subseteq X \times Y$, une **uniformisation** de $O$ est un sous-ensemble de $O$, de même projection sur $X$ que $O$, et qui est le graphe d'une fonction définie sur cette projection. Soit $X$ est un espace métrisable séparable de dimension zéro.

(1) Montrer que si $O \subseteq X \times \omega$ est ouvert, alors $O$ a une uniformisation ouverte.

(2) En déduire que si $(O_n)_{n\in\omega}$ est une suite d'ouverts de $X$, alors il existe une suite $(U_n)_{n\in\omega}$ d'ouverts de $X$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} O_n$ et, pour tout $n \in \omega$, $U_n \subseteq O_n$.

(3) En déduire que si $S \subseteq X$ et $(S_n)_{n\in\omega}$ est une partition de $S$ en ouverts-fermés de $S$, il existe une suite $(U_n)_{n\in\omega}$ d'ouverts de $X$ deux à deux disjoints telle que pour tout $n \in \omega$, $U_n \cap S = S_n$.

**Exercice 2.** (1) Soit $X$ un espace complètement métrisable, $(x_n)_{n\in\omega}$ une suite dense de $X$, et $S$ un $G_\delta$ dense de $X$ disjoint de $\{x_n \mid n \in \omega\}$. Montrer que tout compact de $S$ est d'intérieur vide dans $S$.

(2) En déduire que $\mathbb{P}_\infty := \{\alpha \in 2^\omega \mid \exists^\infty n \in \omega \;\; \alpha(n) = 1\}$ est non vide, polonais, de dimension zéro, et que tout compact de $\mathbb{P}_\infty$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{P}_\infty$.

(3) Dans la suite, on admettra qu'un espace satisfaisant les propriétés apparaissant dans (2) est homéomorphe à $\omega^\omega$ (c'est le théorème d'Alexandrov-Urysohn). Trouver un homéomorphisme explicite entre $\mathbb{P}_\infty$ et $\omega^\omega$.

**Exercice 3.** Soit $(X, d)$ un espace métrique avec $d \leq 1$, et $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de $X$.

(1) On définit une fonction $d_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ par

$$d_H(K, L) := \begin{cases} 0 \text{ si } K, L \text{ sont vides,} \\ 1 \text{ si exactement un des compacts } K, L \text{ est vide,} \\ \max\big(\max_{x\in K} d(x, L), \max_{x\in L} d(x, K)\big) \text{ si } K, L \text{ sont non vides.} \end{cases}$$

Montrer que $d_H$ est une distance sur $\mathcal{K}(X)$.

(2) On note, pour $O, O_0, \cdots, O_{n-1}$ ouverts dans $(X, d)$,

$$\mathcal{B}_{O,O_0,\cdots,O_{n-1}} := \{K \in \mathcal{K}(X) \mid K \subseteq O \text{ et } \forall i < n \;\; K \cap O_i \neq \emptyset\}.$$

Montrer que la famille des ensembles de la forme $\mathcal{B}_{O,O_0,\cdots,O_{n-1}}$ est la base d'une topologie $\tau_H$ sur $\mathcal{K}(X)$, et que $\tau_H$ est définie par $d_H$.

(3) Montrer que l'ensemble des sous-ensembles finis de $X$ est dense dans $(\mathcal{K}(X), d_H)$. En déduire que si $(X, d)$ est séparable, alors $(\mathcal{K}(X), d_H)$ l'est aussi.

(4) Montrer que si $(X, d)$ est complet, alors $(\mathcal{K}(X), d_H)$ l'est aussi. En déduire que si $(X, d)$ est polonais, alors $(\mathcal{K}(X), d_H)$ l'est aussi.

(5) Montrer que si $(X, d)$ est séparable, alors $\mathcal{K}_P(X) := \{K \in \mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\} \mid K \text{ est parfait}\}$ est $G_\delta$.

(6) Montrer que $\mathcal{K}_P(2^\omega)$ est non vide, polonais, de dimension zéro, et que tout compact de $\mathcal{K}_P(2^\omega)$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{K}_P(2^\omega)$.

**Applications.** Dans la suite, on pose $A := \{(\alpha, K) \in \mathbb{P}_\infty \times \mathcal{K}_P(2^\omega) \mid \alpha \in K\}$.

(1) Montrer que $A$ est un fermé de $\mathbb{P}_\infty \times \mathcal{K}_P(2^\omega)$ dont les coupes verticales et horizontales sont parfaites non vides.

(2) Montrer que les projections $\pi_{\mathbb{P}_\infty} : A \to \mathbb{P}_\infty$ et $\pi_{\mathcal{K}_P(2^\omega)} : A \to \mathcal{K}_P(2^\omega)$ définies par $\pi_{\mathbb{P}_\infty}(\alpha, K) := \alpha$ et $\pi_{\mathcal{K}_P(2^\omega)}(\alpha, K) := K$ sont des fonctions ouvertes.

(3) Dans la suite, on dira qu'un $G_\delta$ est **presque ouvert** s'il est dense dans un ouvert. Le but de cette question est de montrer que si $F$ est presque ouvert non vide dans $\mathbb{P}_\infty$, $G$ est presque ouvert non vide dans $\mathcal{K}_P(2^\omega)$, et $f : F \to G$ est une surjection continue ouverte, alors le graphe de $f$ n'est pas contenu dans $A$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde, ce qui donne un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de $\mathbb{P}_\infty$ tel que $F$ soit dense dans $\mathcal{U}$, et des ouverts-fermés $O, O_0, \cdots, O_n$ de $2^\omega$ tels que $G$ soit dense dans $\mathcal{B}_{O, O_0, \cdots, O_n} \cap \mathcal{K}_P(2^\omega)$.

(a) On considère une partition $(C_j)_{j<n+3}$ de $O$ en ouverts-fermés telle que tout $C_j$ rencontre tout $O_i$. On pose, pour $I \subseteq \{0, 1, \cdots, n+2\}$ non vide,

$$V_I := \big\{K \in \mathcal{B}_{O, O_0, \cdots, O_n} \cap \mathcal{K}_P(2^\omega) \mid I = \{j \leq n+2 \mid K \cap C_j \neq \emptyset\}\big\}.$$

Montrer qu'il existe une famille $(W_I)_{\emptyset \neq I \subseteq \{0,1,\cdots,n+2\}}$ d'ouverts non vides de $\mathcal{U}$ deux à deux disjoints telle que, pour tout $I$, $f^{-1}(V_I) = F \cap W_I$.

(b) Montrer que $W_{\{j\}} \subseteq C_j$ si $j \leq n+2$.

(c) Montrer que si $I \subseteq \{0, 1, \cdots, n+2\}$ a deux éléments, il existe $i \leq n$ tel que

$$O_i \cap (\bigcup_{j \in I} C_j) \subseteq \overline{W_I}.$$

(d) Conclure.

L'intérêt de ce résultat est le suivant. Un théorème dit que si $X$ et $Y$ sont des espaces polonais parfaits de dimension zéro, et $A$ est un $G_\delta$ non vide de $X \times Y$ tel que les projections $\pi_X : A \to X$ et $\pi_Y : A \to Y$ soient des fonctions ouvertes, alors on peut trouver des ensembles presque ouverts $F$ et $G$, l'un contenu dans $X$ et l'autre dans $Y$, et une surjection continue ouverte $f : F \to G$ dont le graphe est contenu dans $A$ ou dans $A^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in A\}$ selon le cas. Les hypothèses de ce théorème sont symétriques. L'étude de l'exemple $A$ montre que la conclusion de ce thèorème n'est pas symétrique, puisque dans ce cas l'uniformisation partielle n'est possible que dans un seul des deux sens.