Théorie descriptive des ensembles
Devoir maison n°2

Exercice 1. (1) Montrer que si X, Y sont des espaces de Baire à base dénombrable, alors $X \times Y$ aussi.

(2) Soit $(X_n)_{n\in\omega}$ une suite d'espaces de Baire à base dénombrable, et $A \subseteq \Pi_{n\in\omega} X_n$ ayant la propriété de Baire. On suppose que si $(x_n)_{n\in\omega} \in A$ et $(y_n)_{n\in\omega} \in \Pi_{n\in\omega} X_n$ a la propriété que $y_n = x_n$ sauf pour un nombre fini de n, alors $(y_n)_{n\in\omega} \in A$. Montrer que A est maigre ou comaigre dans $\Pi_{n\in\omega} X_n$.

Exercice 2. Un espace topologique est dit K_σ s'il est réunion dénombrable d'espaces compacts. Fixons un espace polonais X.

(1) Montrer que l'espace de Baire ω^ω n'est pas K_σ. En déduire que si X contient un sous-espace fermé homéomorphe à ω^ω, alors X n'est pas K_σ.

(2) Dans la suite, on cherchera à montrer la réciproque, à savoir que si X n'est pas K_σ, alors X contient un sous-espace fermé homéomorphe à ω^ω. On pourra construire une famille $(C_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ de fermés non vides X satisfaisant les conditions suivantes.

(a) $C_\emptyset = X$
(b) $C_{sn} \subseteq C_s$
(c) $\mathrm{diam}(C_s) \leq 2^{-|s|}$
(d) $C_{sm} \cap C_{sn} = \emptyset$ if $m \neq n$
(e) $C_s \notin K_\sigma$
(f) $\forall l \in \omega \ \ \forall x \in X \ \ \exists O$ voisinage ouvert de x $\ \exists^{\leq 1} s \in \omega^l \ \ C_s \cap O \neq \emptyset$

et montrer que cette construction permet de conclure.

Exercice 3. Rappelons qu'un groupe $(G, \cdot)$ muni d'une topologie τ est un **groupe topologique** si la fonction $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$ est continue de $(G, \tau) \times (G, \tau)$ dans (G, τ).

(1) Soit G un groupe topologique, et H un sous-groupe de G. Montrer que $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.

(2) Soit G un groupe topologique, et H un sous-groupe ouvert de G. Montrer que H est fermé dans G.

(3) Montrer qu'un groupe topologique est de Baire si et seulement s'il est non maigre dans lui-même.

(4) Soit G un groupe polonais, et H un sous-groupe de G. Montrer que si H est G_δ dans G, alors H est fermé dans G.

(5) Soit G un groupe topologique, et $A \subseteq G$ non maigre ayant la propriété de Baire. Montrer que $A^{-1} \cdot A := \{g^{-1} \cdot h \mid g, h \in A\}$ contient un voisinage ouvert de l'élément neutre 1_G de G.

(6) Soit G un groupe topologique de Baire, H un groupe topologique séparable et $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes Baire mesurable. Montrer que f est continu.

(7) Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe de G ayant la propriété de Baire et étant non maigre dans G. Montrer que H est ouvert-fermé dans G.

Exercice 4. Rappelons que tout espace polonais X est la réunion disjointe d'un fermé parfait P et d'un ensemble dénombrable C.

(1) Montrer qu'une telle décomposition est unique. Dans la suite, on dira que P est le **noyau parfait** de X.

(2) On note $X' := \{x \in X \mid x \text{ n'est pas isolé dans } X\}$. Montrer que X' est fermé dans X. On définit alors, pour tout ordinal α, $X^\alpha \subseteq X$ comme suit:

$$
\begin{aligned}
&X^0 := X\\
&X^{\alpha+1} := (X^\alpha)'\\
&X^\lambda := \bigcap_{\alpha<\lambda} X^\alpha \text{ si } \lambda > 0 \text{ est limite.}
\end{aligned}
$$

Montrer qu'il existe un ordinal dénombrable α_0 tel que, si $\alpha \geq \alpha_0$, alors $X^\alpha = X^{\alpha_0}$. Montrer que X^{α_0} est le noyau parfait de X.