Théorie descriptive des ensembles
Devoir maison n°3

Exercice 1. Soit X un espace topologique, Y un espace polonais non vide, $Z \subseteq X$ et $f : Z \to Y$ une fonction borélienne. Montrer qu'il existe $\hat{f} : X \to Y$ borélienne étendant f.

Exercice 2. Soit X un espace topologique, Y un espace polonais, $B \subseteq X \times Y$ un ensemble borélien, et O un sous-ensemble ouvert de Y. Montrer que $\{x \in X \mid O \cap B_x \text{ est maigre dans } O\}$ est borélien.

Exercice 3. Soit (X, τ) un espace polonais, $\xi \geq 1$ un ordinal dénombrable, et (B_n) une suite de sous-ensembles $\mathbf{\Delta}^0_\xi$ de X. Montrer qu'il existe une topologie polonaise τ' sur X contenant τ, rendant les B_n ouverts fermés, et contenue dans $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X, \tau)$.

Exercice 4. Soit X un espace polonais.
(1) Soit X un espace polonais, et $\phi \subseteq 2^X$. On dit que ϕ est **$\mathbf{\Pi}^1_1$ sur $\mathbf{\Pi}^1_1$** si pour tout espace polonais Y et pour tout $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(Y \times X)$, l'ensemble $\{y \in Y \mid A_y \in \phi\}$ est dans $\mathbf{\Pi}^1_1$. Montrer que si ϕ est **$\mathbf{\Pi}^1_1$ sur $\mathbf{\Pi}^1_1$** et $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X) \cap \phi$, alors il existe $B \in \mathbf{\Delta}^1_1(X) \cap \phi$ tel que $B \subseteq A$.
(2) Soit $\Phi \subseteq 2^X \times 2^X$. On suppose que Φ est

- **$\mathbf{\Pi}^1_1$ sur $\mathbf{\Pi}^1_1$** : pour tous espaces polonais Y, Z et pour tous $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(Y \times X)$, $B \in \mathbf{\Pi}^1_1(Z \times X)$, l'ensemble $\{(y, z) \in Y \times Z \mid (A_y, B_z) \in \Phi\}$ est dans $\mathbf{\Pi}^1_1$,
- **monotone** : pour tous $A, B, A', B' \in 2^X$,

$$((A, B) \in \Phi,\ A \subseteq A' \text{ et } B \subseteq B') \text{ impliquent que } (A', B') \in \Phi,$$

- **continue dans la seconde variable** : pour tous $A \in 2^X$ et $(B_n)_{n\in\omega} \in (2^X)^\omega$,

$$((A, B_n) \in \Phi,\ B_{n+1} \subseteq B_n \text{ pour tout } n \in \omega) \text{ impliquent que } (A, \textstyle\bigcap_{n\in\omega} B_n) \in \Phi.$$

Soit $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$ tel que $(A, \neg A) \in \Phi$, et $C \in \mathbf{\Delta}^1_1(X)$ tel que $C \subseteq A$. Montrer qu'il existe $\overline{C} \in \mathbf{\Delta}^1_1(X)$ tel que $C \subseteq \overline{C} \subseteq A$ et $(\overline{C}, \neg C) \in \Phi$.
(3) En déduire que si $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$ et $(A, \neg A) \in \Phi$, alors il existe $B \in \mathbf{\Delta}^1_1(X)$ tel que $B \subseteq A$ et $(B, \neg B) \in \Phi$.

Exercice 5. Soit X un ensemble, et $(C)_{s\in\omega^{<\omega}}$ une famille de sous-ensembles de X. On note

$$\mathcal{A}_s C_s := \bigcup_{\alpha\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} C_{\alpha|n}.$$

Si $\mathbf{\Gamma}$ est une classe de sous-ensembles de X, on note $\mathcal{A}\mathbf{\Gamma} := \{\mathcal{A}_s C_s \mid \forall s \in \omega^{<\omega}\ \ C_s \in \mathbf{\Gamma}\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{A}\mathcal{A}\mathbf{\Gamma} = \mathcal{A}\mathbf{\Gamma}$.

(2) On suppose que X est un espace polonais, d est une distance définissant la topologie de X, et $A \subseteq X$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est analytique,

(ii) $A = \mathcal{A}_s C_s$, où les C_s sont fermés,

(iii) $A = \mathcal{A}_s C_s$, où les C_s sont fermés, $(s \subseteq t \Rightarrow C_s \supseteq C_t)$, $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(C_{\alpha|n}) = 0$ pour tout $\alpha \in \omega^\omega$, et $C_s \neq \emptyset$ si $A \neq \emptyset$,

(iv) $A = \mathcal{A}_s C_s$, où les C_s sont analytiques, $C_\emptyset = A$, $C_s = \bigcup_{n\in\omega} C_{sn}$, $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(C_{\alpha|n}) = 0$ pour tout $\alpha \in \omega^\omega$, et $\bigcap_{n\in\omega} C_{\alpha|n} \neq \emptyset$, pour tout $\alpha \in \omega^\omega$, si $A \neq \emptyset$.