Théorie descriptive des ensembles
Devoir maison n°4

Exercice 1. Soit X un espace polonais récursif, et Γ une classe de Kleene de la forme Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n, ou Π^1_n.

(1) Montrer qu'il existe $W^\Gamma \in \Gamma(\omega \times X)$ tel que, pour tout $A \in \Gamma(\omega \times X)$, il existe $f : \omega \to \omega$ récursive telle que $(n,x) \in A \Leftrightarrow \big(f(n),x\big) \in W^\Gamma$.

(2) Montrer qu'il existe $\mathbf{W}^\Gamma \in \Gamma(\omega^\omega \times X)$ tel que, pour tout $A \in \mathbf{\Gamma}(\omega^\omega \times X)$, il existe $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ continue telle que $(\alpha,x) \in A \Leftrightarrow \big(f(\alpha),x\big) \in \mathbf{W}^\Gamma$.

Exercice 2. Soit X un espace polonais récursif. Le but de cet exercice est de montrer que X est récursivement régulier, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \Sigma^0_1(\omega^2)$ et $T \in \Sigma^0_1(\omega^3)$ telles que, si

$$P_{m,n} := \{x \in X \mid \forall k \in \omega \;\; T(m,n,k) \Rightarrow x \notin N(X,k)\},$$

(i) $\forall n \in \omega \;\; \big(x \in N(X,n) \Leftrightarrow \exists m \in \omega \;\; x \in N(X,m) \wedge S(m,n)\big)$,

(ii) $\forall m,n \in \omega \;\; S(m,n) \Rightarrow N(X,m) \subseteq P_{m,n} \subseteq N(X,n)$.

(1) On suppose d'abord que l'espace basique X provient d'une présentation récursive $\big((x_n),d\big)$. Montrer que l'on peut prendre

$$S(m,n) \Leftrightarrow d\big(x_{(m)_0}, x_{(n)_0}\big) < \frac{(n)_1}{(n)_2+1} - \frac{(m)_1}{(m)_2+1}$$

et $T(m,n,k) \Leftrightarrow S(m,n) \wedge d\big(x_{(m)_0}, x_{(k)_0}\big) > \frac{(m)_1}{(m)_2+1} + \frac{(k)_1}{(k)_2+1}$.

(2) Pour le cas général, supposons que X soit récursivement régulier, avec témoins S et T, et que $\varphi : X \to Y$ est un isomorphisme récursif, ce qui donne $A, B \in \Sigma^0_1(\omega^2)$ telles que

$$\varphi(x) \in N(Y,n) \Leftrightarrow \exists p \in \omega \;\; x \in N(X,p) \wedge A(p,n)$$

et $\varphi^{-1}(y) \in N(X,n) \Leftrightarrow \exists p \in \omega \;\; y \in N(Y,p) \wedge B(p,n)$. Montrer que l'on peut prendre

$$S^*(m,n) \Leftrightarrow \exists k,l \in \omega \;\; B(m,k) \wedge S(k,l) \wedge A(l,n)$$

et $T^*(m,n,i) \Leftrightarrow \exists k,l,j \in \omega \;\; B(m,k) \wedge S(k,l) \wedge A(l,n) \wedge T(k,l,j) \wedge B(i,j)$.

Exercice 3. Soit X un espace polonais récursif, et $P, Q \in \Pi^0_1(X)$ disjoints. On veut montrer que X est effectivement normal, c'est-à-dire qu'il existe $P^*, Q^* \in \Sigma^0_1(X)$ disjoints tels que $P \subseteq P^*$ et $Q \subseteq Q^*$. Pour ce faire, on considère $A, B \in \Sigma^0_1(\omega)$ tels que $x \notin P \Leftrightarrow \exists p \in \omega \;\; x \in N(X,p) \wedge p \in A$ et $x \notin Q \Leftrightarrow \exists p \in \omega \;\; x \in N(X,p) \wedge p \in B$. Soient S, T fournis par l'exercice 2.

Posons $A'(p) \Leftrightarrow \exists q \in \omega \;\; A(q) \wedge S(p,q)$ et $B'(p) \Leftrightarrow \exists q \in \omega \;\; B(q) \wedge S(p,q)$. Montrer qu'il existe $A^*, B^* \subseteq \omega^2$ recursives telles que $A' = \exists^\omega A^*$ et $B' = \exists^\omega B^*$. On pourra poser

$$\begin{aligned} x \in P^* \Leftrightarrow \exists p, m \in \omega \quad & \Big(x \in N(X,p) \wedge B^*(p,m) \wedge \\ & \forall < q, n > \leq < p, m > \; \Big(A^*(q,n) \Rightarrow \\ & \qquad \exists i, j \in \omega \;\; \big(A(i) \wedge S(q,i) \wedge T(q,i,j) \wedge x \in N(X,j) \big) \Big) \Big). \end{aligned}$$