

## Exercices sur les variables aléatoires.

**Exercice 1.** Soit  $X$  la somme obtenue lors du lancement d'une paire de dés.

- Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . Représenter graphiquement.
- Déterminer la fonction de répartition de  $X$ . Représenter graphiquement.
- Calculer l'espérance de  $X$ .
- Calculer la variance et l'écart-type de  $X$ .

**Exercice 2.** On jette une pièce de monnaie trois fois. Soit  $X$  le nombre de fois où l'on obtient "face".  
Mêmes questions que dans l'exercice 1.

**Exercice 3.** Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire 2 boules sans remise. Soit  $X$  le nombre de boules blanches obtenues. Mêmes questions qu'en 1.

**Exercice 4.** Même exercice que le précédent si maintenant le tirage est fait avec remise.

**Exercice 5.** On jette une pièce de monnaie 2 fois. Soit  $X$  la différence entre le nombre de "face" et le nombre de "pile". Mêmes questions que dans l'exercice 1.

**Exercice 6.** D'après les résultats de nombreuses enquêtes, il a été établi que 30 personnes sur 100, qui ont été sélectionnées pour compléter un questionnaire, retournent le questionnaire à l'auteur du sondage. Une maison de sondages expédie un questionnaire à 4 personnes. Soit  $X$  le nombre de personnes retournant le questionnaire.

- Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
- Déterminer  $F(1)$  et  $F(3)$ . Que veut dire en mots chacune de ces probabilités ?
- Quel est le nombre le plus probable de personnes, parmi 4, qui vont retourner le questionnaire ?

**Exercice 7.** Un professeur pose ses étudiants un devoir sous forme de QCM. Il comporte 4 questions notées chacune 5 ou 0. A chaque question, l'étudiant a le choix entre 3 réponses, une seule étant exacte. Un étudiant n'a pas révisé et répond au hasard.

- Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins 10 ?
- Quelle est l'espérance de sa note ?

**Exercice 8.** La loi de probabilité conjointe de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  s'exprime par la formule  $l(x; y) = c.(2x + y)$ , où  $X$  et  $Y$  peuvent prendre toutes les valeurs entières telles que  $0 \leq X \leq 2$  et  $0 \leq Y \leq 3$ .

- Déterminer la constante  $c$ .
- Que vaut  $p(X = 2 \text{ et } Y = 1)$  ?
- Que vaut  $p(X \geq 1 \text{ et } Y \leq 2)$  ?
- Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et la loi de probabilité de  $Y$ .
- Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Pourquoi ?

**Exercice 9.** Une loterie distribue 200 lots de 250 euros, 20 lots de 1250 euros, 5 lots de 5000 euros. En supposant que 10000 billets ont été émis et vendus, quel est le prix minimum du billet pour que l'organisation soit financièrement équilibrée (on donnera une solution **probabiliste**) ?

**Exercice 10.** Une corporation sans but lucratif veut lancer une souscription pour financer en partie la construction d'un centre sportif. Par expérience, on sait que les montants souscrits varient selon une loi de probabilité que l'on peut déduire du tableau suivant :

Montant souscrit (en euros)	Probabilité
1000	0,001
500	0,01
200	0,05
100	0,12
50	0,15
20	0,2
10	0,15
5	0,1
2	0,08
1	0,06

- a) Quel est le montant espéré par individu sollicité ?  
 b) La corporation espère recueillir 200000 euros. Combien d'individus devrait-elle solliciter ?

**Exercice 11.** Une entreprise doit choisir entre deux projets de renouvellement d'équipement. Les gains possibles de chaque projet sont répartis suivant les lois de probabilité suivantes :

Projet A	
Gain (en euros)	Probabilité
25000	0,25
30000	0,3
35000	0,2
40000	0,15
45000	0,1

Projet B	
Gain (en euros)	Probabilité
20000	0,15
25000	0,35
30000	0,25
35000	0,15
40000	0,1

- a) Quel est le gain espéré de chaque projet ?  
 b) Quel est l'écart-type du gain pour chaque projet ?  
 c) Calculer le coefficient de variation de chaque projet. Lequel semble le plus risqué ?  
 d) Après réévaluation des gains possibles, il semble que ceux-ci doivent être réduits de 1000 euros. Que deviennent le gain espéré et l'écart-type de chaque projet ?

**Exercice 12.** On donne la loi conjointe de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

$Y \backslash X$	0	1	2
10	0	0,25	0
12	0,25	0	0,25
14	0	0,25	0

- a) Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
- b) Calculer  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
- c) Calculer  $E(X.Y)$ .
- d) Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
- e) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

**Exercice 13.** Soit  $X$  la demande pour un certain produit pendant la semaine 1, avec la loi de probabilité suivante :

$v$	$l(v)$
20	0,2
25	0,5
30	0,3

La demande  $Y$  pour ce même produit durant la semaine 2 a la même loi de probabilité. On suppose que les demandes pour ce produit pour deux semaines consécutives sont indépendantes.

- a) Quelle est la loi de la demande pendant la quinzaine ?
- b) Quelle est l'espérance de la demande pendant la quinzaine ?
- c) Quelle est la variance de la demande pendant la quinzaine ?