Classes de Wadge potentielles des boréliens à coupes dénombrables.

Dominique LECOMTE

C. R. Acad. Sci. Paris 317, Série 1 (1993), 1045-1048

Résumé. On donne, pour chaque classe de Wadge non auto-duale Γ contenue dans la classe des G_δ, une caractérisation des boréliens qui ne sont pas potentiellement dans Γ, parmi les boréliens à coupes verticales dénombrables ; pour ce faire, on utilise des résultats d'uniformisation partielle.

Potential Wadge classes of Borel sets with countable sections.

Abstract. We give, for each non self-dual Wadge class Γ contained in the class of the G_δ sets, a characterization of Borel sets which are not potentially in Γ, among Borel sets with countable vertical sections; to do this, we use results of partial uniformization.

On va poursuivre dans cette Note l'étude des classes de Wadge potentielles entamée dans [L]. On utilisera les notations standard de la théorie descriptive des ensembles, qui peuvent être trouvées dans [Mo]. Par exemple, si ξ est un ordinal dénombrable impair, on notera $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ la classe des ensembles de la forme $\bigcup_{\eta<\xi,\ \eta \text{ pair}} U_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta)$, où $(U_\eta)_{\eta<\xi}$ est une suite croissante d'ouverts. Rappelons les définitions de base :

Définitions. *(a) Soit Γ une classe de parties d'espaces polonais de dimension 0. On dit que Γ est une $classe\ de\ Wadge$ s'il existe un espace polonais P_0 de dimension 0, et un borélien A_0 de P_0 tels que pour tout espace polonais P de dimension 0 et pour toute partie A de P, A est dans Γ si et seulement s'il existe une fonction continue f de P dans P_0 telle que $A = f^{-1}(A_0)$.*
(b) Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien de $X \times Y$. Si Γ est une classe de Wadge, on dira que A est $potentiellement\ dans$ Γ (ce qu'on notera $A \in pot(\Gamma)$) s'il existe des topologies polonaises de dimension 0, σ (sur X) et τ (sur Y), plus fines que les topologies initiales, telles que A, considéré comme partie de $(X, \sigma) \times (Y, \tau)$, soit dans Γ.

Dans l'étude des relations d'équivalence boréliennes, par exemple dans [HKL], on étudie le pré-ordre qui suit. Si E (resp. E') est une relation d'équivalence borélienne sur l'espace polonais X (resp. X'), on pose

$$E \leq E' \Leftrightarrow \text{ il existe } f \text{ borélienne de } X \text{ dans } X' \text{ telle que } xEy \Leftrightarrow f(x)E'f(y).$$

La dernière relation peut s'écrire $E = (f \times f)^{-1}(E')$; or si E' est dans Γ (ou même si E' est pot(Γ)) et $E = (f \times f)^{-1}(E')$, E est pot(Γ). Ceci motive l'introduction de la notion de classe de Wadge potentielle.

Les classes de Wadge envisagées dans cette Note seront les classes de Baire $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, les $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, et leurs classes duales (la classe duale $\check{\Gamma}$ de la classe Γ est la classe des complémentaires des éléments de Γ ; par exemple, $\check{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \mathbf{\Pi}^0_1$). L'article [L] suggérait que l'étude des problèmes d'uniformisation partielle pourrait être riche d'enseignements pour l'étude des classes de Wadge potentielles ; cet espoir est confirmé par cette Note.

1 Quelques résultats sur l'uniformisation partielle.

On commence par donner un nouvel exemple de théorème vrai pour la mesure et pas pour la catégorie. Mauldin a démontré dans [Ma] le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soient X et Y des espaces polonais, λ (resp. μ) une mesure de probabilité sur X (resp. Y), et A un borélien de $X \times Y$ ayant ses coupes horizontales (resp. verticales) non dénombrables μ-presque partout (resp. λ-presque partout). Alors il existe un borélien F de X et un borélien G de Y tels que $\lambda(F) = \mu(G) = 1$, et un isomorphisme borélien de F sur G dont le graphe est contenu dans A.*

On peut se demander si on a un résultat analogue en remplaçant "ensemble de mesure nulle" par "ensemble maigre". On va voir que non.

Définitions 1.2 *(a) Un G_δ d'un espace topologique est dit $presque$-$ouvert$ (ou p.o.) s'il est contenu dans l'intérieur de son adhérence (ce qui revient à dire qu'il est dense dans un ouvert).*

(b) Si X et Y sont des espaces topologiques, une partie A de $X \times Y$ sera dite $localement\ \grave{a}\ projections\ ouvertes$ (ou l.p.o.) si pour tout ouvert U de $X \times Y$, les projections de $A \cap U$ sont ouvertes.

Les ensembles l.p.o. se rencontrent par exemple dans la situation suivante : A est Σ^1_1 dans un produit de deux espaces polonais récursivement présentés. Si on munit ces deux espaces de leur topologie de Gandy-Harrington (celle engendrée par les Σ^1_1), A devient l.p.o. dans le nouveau produit. C'est essentiellement dans cette situation qu'on utilisera cette notion, au cours des preuves dans la section 2. Posons

$$A_0 := \{(x, K) \in 2^\omega \times \mathcal{K}(2^\omega) \setminus \{\emptyset\} \ / \ x \in K\},$$

et soient $F \subseteq 2^\omega$, et $G \subseteq \mathcal{K}(2^\omega) \setminus \{\emptyset\}$.

Théorème 1.3 *Le fermé A_0 est l.p.o. à coupes verticales non dénombrables, a ses coupes horizontales non dénombrables sur un ensemble co-maigre, et*

(a) Si F et G sont co-maigres et $f : F \to G$ est un isomorphisme borélien, Gr$(f) \not\subseteq A_0$.

(b) Si F et G sont presque-ouverts non vides et $f : F \to G$ surjective continue ouverte, Gr$(f) \not\subseteq A_0$.

Il résulte immédiatement du théorème 19.6 de [O] que sous l'hypothèse du continu, il existe une bijection idempotente Φ de $[0, 1]$ sur lui-même telle que E est maigre ssi $\lambda(\Phi^{-1}(E)) = 0$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. En analysant les raisons du résultat négatif 1.3, on peut montrer le

Corollaire 1.4 *Une telle fonction Φ n'est pas borélienne. De plus, sous l'hypothèse de détermination des jeux $\mathbf{\Delta}^1_{2n+3}$*, Φ n'est pas $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-mesurable.

Le résultat essentiel de cette section est le

Théorème 1.5 *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors il existe des p.o. non vides F et G (l'un contenu dans X, et l'autre dans Y), et $f : F \to G$ surjective continue ouverte dont le graphe est contenu dans A, ou dans l'ensemble $A^* := \{(y,x) \ / \ (x,y) \in A\}$.*

La partie (b) du théorème 1.3 montre qu'on ne peut pas, en général, avoir uniformisation dans les deux sens, malgré des hypothèses symétriques. Cependant, on a uniformisation si l'on n'exige pas que l'image soit "grosse" :

Proposition 1.6 *Soient X et Y des espaces métrisables séparables de dimension 0, Y étant complet, et $f : Y \to X$ une surjection continue ouverte ; alors il existe un homéomorphisme g de X sur une partie de Y tel que $f \circ g = Id_X$.*

Bien sûr, ce résultat est faux si on enlève la condition de dimension sur X.

Corollaire 1.7 *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors A est uniformisable sur un presque-ouvert non vide de X par une application continue et ouverte sur son image.*

Cette image est en général rare, d'après ce qui précède.

2 Applications aux classes de Wadge potentielles.

Soit ξ un ordinal dénombrable non nul. On définit $f : \omega^{<\omega} \to \{-1\} \cup (\xi+1)$, par récurrence sur $|s|$, comme suit : $f(\emptyset) = \xi$ et

$$f(s^\frown n) = \begin{cases} \bullet \ -1 \text{ si } f(s) \leq 0, \\ \bullet \ \theta \text{ si } f(s) = \theta + 1, \\ \bullet \text{ un ordinal impair de } f(s) \text{ tel que la suite } (f(s^\frown n))_n \text{ soit co-finale dans} \\ f(s) \text{ et strictement croissante si } f(s) \text{ est limite non nul.} \end{cases}$$

On définit alors des arbres : $T_\xi := \{s \in \omega^{<\omega} \ / \ f(s) \neq -1\}$ et $T'_\xi := \{s \in T_\xi \ / \ f(s) \neq 0\}$. Dans la suite, si f_s est une fonction partielle de X dans Y ou de Y dans X, on notera G_s la partie de $X \times Y$ égale au graphe de f_s si f_s va de X dans Y, et égale à $\mathrm{Gr}(f_s)^*$ sinon.

Théorème 2.1 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$) de $X \times Y$, et ξ un ordinal dénombrable non nul.*

(a) Si ξ est pair, A est non-pot($D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) si et seulement s'il existe des espaces polonais parfaits Z et T de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $B_p := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \text{ paire}} G_s$ et $B_i := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \text{ impaire}} G_s$, on ait $\overline{B_p} = B_p \cup B_i$, $B_p \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$, $B_i \subseteq (u \times v)^{-1}(\check{A})$, et $G_s = \overline{\bigcup_{n\in\omega} G_{s^\frown n}} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} G_{s^\frown n})$ si $s \in T'_\xi$.

(b) Si ξ est impair, A est non-pot($\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $B_p := \bigcup_{s\in T_\xi\ /\ \vert s\vert\ paire} G_s$ et $B_i := \bigcup_{s\in T_\xi\ /\ \vert s\vert\ impaire} G_s$, on ait $\overline{B_i} = B_p \cup B_i$, $B_i \subseteq (u\times v)^{-1}(A)$, $B_p \subseteq (u\times v)^{-1}(\check{A})$, et $G_s = \overline{\bigcup_{n\in\omega} G_{s^\frown n}} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} G_{s^\frown n})$ si $s \in T'_\xi$.

L'hypothèse "$A \in \mathrm{pot}(\mathbf{\Sigma}^0_3) \cap \mathrm{pot}(\mathbf{\Pi}^0_3)$" recouvre en particulier le cas où A est à coupes verticales dénombrables, ou à coupes verticales co-dénombrables.

Théorème 2.2 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X\times Y$.*
(a) A est non-pot($\mathbf{\Pi}^0_1$) si et seulement s'il existe des espaces polonais Z' et T' parfaits de dimension 0, une suite d'ouverts-fermés (A_n) (resp. (B_n)) de Z' (resp. T'), des surjections continues ouvertes f_n de A_n sur B_n, et des fonctions continues U et V tels que si $B = \bigcup_{n>0} Gr(f_n)$, on ait les inclusions $\emptyset \neq Gr(f_0) \subseteq \overline{B}\setminus B$ et $B = (U\times V)^{-1}(A)$.
(b) A est non-pot($\mathbf{\Pi}^0_1$) si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0 non vides, une suite d'ouverts denses (E_n) de Z, des applications continues ouvertes g_n de E_n dans T, et des fonctions continues u et v tels que $(g_n)_{n>0}$ converge simplement vers g_0 sur $\bigcap_{n\in\omega} E_n$, $Gr(g_0) \subseteq (u\times v)^{-1}(\check{A})$ et $\bigcup_{n>0} Gr(g_n) \subseteq (u\times v)^{-1}(A)$.

On note, si Γ est une classe de Wadge non auto-duale, Γ^+ la classe de Wadge successeur de Γ pour l'inclusion.

Proposition 2.3 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X\times Y$, et k un entier naturel non nul. Alors on a les équivalences suivantes :*
(a) A est non-pot($\mathbf{\Delta}^0_1$) $\Leftrightarrow$ A est non-pot($\mathbf{\Sigma}^0_1$) $\Leftrightarrow$ la projection de A sur Y est non dénombrable.
(b) A est non-pot($\check{D}_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) $\Leftrightarrow$ A est non-pot($\check{D}_{2k}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) $\Leftrightarrow$ A est non-pot($D_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)^+$).
(c) A est non-pot($D_{2k+1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) $\Leftrightarrow$ A est non-pot($D_{2k}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) $\Leftrightarrow$ A est non-pot($D_{2k}(\mathbf{\Sigma}^0_1)^+$).

Les boréliens à coupes verticales dénombrables sont pot($\mathbf{\Sigma}^0_2$), donc il nous reste à caractériser lesquels de ces boréliens sont pot($\mathbf{\Pi}^0_2$) (en effet, les seules classes de Wadge non auto-duales contenues dans $\mathbf{\Delta}^0_2$ sont $\{\emptyset\}$, $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, et leurs classes duales). On a le résultat classique d'Hurewicz, démontré dans [SR] :

Théorème 2.4 *Soit X un espace polonais, et A un borélien de X. Alors A est non-$\mathbf{\Pi}^0_2$ si et seulement s'il existe E dénombrable sans point isolé tel que $\overline{E}\setminus E \approx \omega^\omega$ et $E = A\cap \overline{E}$.*

Théorème 2.5 *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien de $X\times Y$ à coupes verticales dénombrables. Alors A est non-pot($\mathbf{\Pi}^0_2$) si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0 non-vides, des injections continues u et v, des ouverts denses (A_n) de Z, des applications continues et ouvertes f_n de A_n dans T, tels que pour tout x dans $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, l'ensemble $E_x := \{f_n(x)\ /\ n\in\omega\}$ soit sans point isolé, $\overline{E_x}\setminus E_x \approx \omega^\omega$, et $E_x = (u\times v)^{-1}(A)_x \cap \overline{E_x}$.*

3 Références.

[HKL] L. A. Harrington, A. S. Kechris et A. Louveau, *A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations,* J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 903-928
[L] D. Lecomte, *Classes de Wadge potentielles et théorèmes d'uniformisation partielle,* Fund. Math. 143 (1993), 231-258
[Ma] R. D. Mauldin, *One-to-one selections, marriage theorems,* Amer. J. Math. 104 (1982), 823-828
[Mo] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory,* North-Holland, 1980
[O] J. C. Oxtoby, *Measure and category,* Springer-Verlag, 1971
[SR] J. Saint Raymond, *La structure borélienne d'Effros est-elle standard ?,* Fund. Math. 100 (1978), 201-210