Tests à la Hurewicz dans le plan.

Dominique LECOMTE

Fund. Math. 156 (1998), 131-165

Résumé. Nous donnons, pour une certaine catégorie de boréliens d'un produit de deux espaces polonais, comprenant les boréliens à coupes dénombrables, une caractérisation du type "test d'Hurewicz" de ceux ne pouvant pas être rendus différence transfinie d'ouverts par changement des deux topologies polonaises.

1 Introduction.

Ces travaux se situent dans le cadre de la théorie descriptive des ensembles. Je renvoie le lecteur à [Ku] (resp. [Mo]) pour les notions de base de théorie descriptive classique (resp. effective). Rappelons que dans le cas des espaces polonais de dimension 0, la hiérarchie de Baire des boréliens est construite en alternant les opérations de réunion dénombrable et de passage au complémentaire, en partant des ouverts-fermés, ce de manière transfinie. On a alors la hiérarchie suivante :

$$\begin{array}{llll} \mathbf{\Sigma}^0_1 = \text{ouverts} & \mathbf{\Sigma}^0_2 = F_\sigma & \ldots & \mathbf{\Sigma}^0_\omega \ \ \ldots \\ \mathbf{\Pi}^0_1 = \text{fermés} & \mathbf{\Pi}^0_2 = G_\delta & \ldots & \mathbf{\Pi}^0_\omega \ \ \ldots \end{array}$$

On s'intéresse ici à une hiérarchie analogue à celle de Baire, sauf qu'au lieu de partir des ouverts-fermés d'un espace polonais de dimension 0, on part des produits de deux boréliens, chacun d'entre eux étant inclus dans un espace polonais. L'analogie devient plus claire quand on sait qu'étant donnés un espace polonais X et un borélien A de X, on peut trouver une topologie polonaise plus fine que la topologie initiale sur X (topologie ayant donc les mêmes boréliens), de dimension 0, et qui rende A ouvert-fermé. Pour notre problème, le fait de travailler dans les espaces de dimension 0 n'est donc pas une restriction réelle. La définition qui suit apparaît alors naturelle :

Définition. *Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien de $X \times Y$. Si Γ est une classe de Baire, on dira que A est $potentiellement\ dans$ Γ (ce qu'on notera $A \in$ pot(Γ)) s'il existe des topologies polonaises de dimension 0, σ (sur X) et τ (sur Y), plus fines que les topologies initiales, telles que A, considéré comme partie de $(X, \sigma) \times (Y, \tau)$, soit dans Γ.*

La motivation pour l'étude de ces classes de Baire potentielles trouve son origine dans l'étude des relations d'équivalence boréliennes, et plus précisément dans l'étude du pré-ordre suivant sur la collection des relations d'équivalence boréliennes définies sur un espace polonais :

$$E \leq F \ \Leftrightarrow\ \exists f \text{ borélienne } \ E = (f \times f)^{-1}(F).$$

A l'aide de la notion de classe de Baire potentielle, A. Louveau montre dans [Lo3] que la collection des relations d'équivalence $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ n'est pas co-finale, et il en déduit qu'il n'existe pas de relation maximum pour $\leq$.

Pour déterminer la complexité exacte d'un borélien, on est amené à montrer qu'il n'est pas d'une classe de Baire donnée - ce qui est généralement beaucoup plus difficile que de montrer qu'il est d'une autre classe de Baire. Le théorème d'Hurewicz, rappelé ci-dessous, donne une condition nécessaire et suffisante pour la classe des G_δ (cf [SR]).

Théorème. *Soient X un espace polonais, et A un borélien de X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) Le borélien A n'est pas $\mathbf{\Pi}^0_2$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \rightarrow X$ injective continue telle que $u^{-1}(A) = \{\alpha \in 2^\omega \ / \ \exists\, n\ \forall\, m \geq n\ \ \alpha(m) = 0\}$.

Ce théorème a été généralisé aux autres classes de Baire par A. Louveau et J. Saint Raymond (cf [Lo-SR]). On cherche à établir des résultats analogues au théorème d'Hurewicz pour les classes de Baire potentielles. Dans la première partie, nous nous intéresseront à la caractérisation des ensembles potentiellement fermés ; nous démontrons le

Théorème. *Il existe un borélien A_1 de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :*
(a) Le borélien A n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \rightarrow X$ et $v : 2^\omega \rightarrow Y$ telles que $\overline{A_1} \cap (u \times v)^{-1}(A) = A_1$.

Rappelons que les boréliens à coupes verticales (ou horizontales) dénombrables sont pot($\mathbf{\Sigma}^0_2$) (cf [Lo1]), donc vérifient l'hypothèse de ce théorème. Il est à noter qu'on ne peut pas espérer une réduction sur tout le produit, c'est à dire qu'on ne peut pas avoir $(u \times v)^{-1}(A) = A_1$ dans la condition (b) (cf [Le1], Cor. 4.14.(b)). Nous montrerons également l'impossibilité d'avoir l'injectivité des fonctions u et v de réduction, ce qui constitue une autre différence avec le théorème d'Hurewicz.

Dans la seconde partie, nous étendrons ce théorème à d'autres classes, qui s'introduisent naturellement à partir du théorème d'Hurewicz. En effet, ce théorème montre entre autres l'intérêt des réductions par des fonctions continues pour la comparaison de la complexité des boréliens. La définition suivante apparaît alors naturelle :

Définition. *Soit Γ une classe de parties d'espaces polonais de dimension 0. On dit que Γ est une $classe\ de\ Wadge$ s'il existe un espace polonais P_0 de dimension 0, et un borélien A_0 de P_0 tels que pour tout espace polonais P de dimension 0 et pour toute partie A de P, A est dans Γ si et seulement s'il existe une fonction continue f de P dans P_0 telle que $A = f^{-1}(A_0)$.*

On peut démontrer que la hiérarchie de Wadge affine celle de Baire. L'utilité de considérer les espaces de dimension 0 apparaît ici : il faut assurer l'existence de suffisamment de fonctions continues. En effet, les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans 2^ω sont les fonctions constantes ! Il y a eu des travaux, notamment de A. Louveau et J. Saint Raymond (cf [Lo2]), pour décrire la hiérarchie de Wadge en termes d'opérations ensemblistes, comme dans la hiérarchie de Baire. Ceci amène à considérer de nouveaux ensembles.

Par exemple, si ξ est un ordinal dénombrable et $(A_\eta)_{\eta<\xi}$ une suite croissante d'ouverts d'un espace polonais X, on note

$$D((A_\eta)_{\eta<\xi}) := \left\{ x \in X \ / \ \exists\, \eta < \xi \ \ x \in A_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} A_\theta) \text{ et } \eta \text{ n'a pas la même parité que } \xi \right\}.$$

On note $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ la classe des ensembles de la forme $D((A_\eta)_{\eta<\xi})$. On peut montrer que les seules classes de Wadge non stables par passage au complémentaire contenues dans $\mathbf{\Delta}^0_2 = \mathbf{\Sigma}^0_2 \cap \mathbf{\Pi}^0_2$ sont les $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ et $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. On obtient alors la hiérarchie suivante :

$$\begin{array}{llllll} D_0(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \{\emptyset\} & D_1(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \text{ouverts} & \ldots & D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1) & \ldots & \mathbf{\Sigma}^0_2 \\ \check{D}_0(\mathbf{\Sigma}^0_1) & \check{D}_1(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \text{fermés} & \ldots & \check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1) & \ldots & \mathbf{\Pi}^0_2 \end{array}$$

On peut définir sans problème les ensembles potentiellement Γ, où Γ est une classe de Wadge, en utilisant la même définition que précédemment. Nous démontrons le

Théorème. *Soit ξ un ordinal dénombrable.*

(1) Si ξ est pair, il existe un borélien A_ξ de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) Le borélien A n'est pas pot($D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$).

(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \to X$ et $v : 2^\omega \to Y$ telles que $\overline{A_\xi} \cap (u \times v)^{-1}(A) = A_\xi$.

(2) Si ξ est impair, il existe un borélien A_ξ de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) Le borélien A n'est pas pot($\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$).

(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \to X$ et $v : 2^\omega \to Y$ telles que $\overline{A_\xi} \cap (u \times v)^{-1}(A) = A_\xi$.

Questions. (a) Un premier problème ouvert est de savoir si on peut supprimer l'hypothèse "A est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$)" dans ce théorème.

(b) Un deuxième problème ouvert est le suivant. Comme nous l'avons mentionné avant, les seules classes de Wadge non stables par passage au complémentaire contenues dans $\mathbf{\Delta}^0_2$ sont les $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ et $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Les boréliens à coupes dénombrables étant pot($\mathbf{\Sigma}^0_2$), la caractérisation de ces boréliens en termes de "tests à la Hurewicz" est donc complète, à l'exception de ceux qui ne sont pas pot($\mathbf{\Pi}^0_2$). La question est donc de savoir si la conjecture suivante est vraie :

Conjecture. *Il existe un borélien B de $2^\omega \times 2^\omega$, tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ à coupes dénombrables, on a l'équivalence entre les conditions suivantes :*

(a) Le borélien A n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_2$).

(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \to X$ et $v : 2^\omega \to Y$ telles que $\overline{B} \cap (u \times v)^{-1}(A) = B$.

2 Un test pour les ensembles non potentiellement fermés.

(A) La construction de base.

Nous montrons un premier résultat qui n'est pas tout à fait la caractérisation des ensembles non potentiellement fermés annoncée dans l'introduction. Sa démonstration est plus importante que l'énoncé lui-même, et fournit une construction qui sera affinée plus tard, de 3 manières différentes :

- Pour établir la caractérisation des ensembles non potentiellement fermés.
- Pour montrer l'impossibilité de l'injectivité de la réduction.
- Pour établir la caractérisation des ensembles non potentiellement différence transfinie d'ouverts.

Pour énoncer et établir ce résultat, il nous faut du vocabulaire :

Définition 2.1 *Soient* (G_n) *une suite de fermés et* G *un fermé d'un espace topologique* X. *On dit que* (G_n) $converge\ vers$ G *si* $G = \overline{\bigcup_{n\in\omega} G_n} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} G_n)$.

L'idée est la suivante : comment tester si une partie A d'un espace métrique est fermée ? Une réponse est que A n'est pas fermé si et seulement s'il existe une suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers un point x hors de A. On a alors, avec la définition précédente, que $(\{x_n\})$ converge vers $\{x\}$. On ne peut pas prendre ce test pour caractériser les ensembles non potentiellement fermés, puisque le singleton $\{x\}$ peut être rendu ouvert-fermé. Cependant, on peut remarquer que si X est un espace polonais et τ une topologie polonaise plus fine sur X, il existe un G_δ dense de X sur lequel les deux topologies coïncident. L'idée est donc de remplacer les singletons par des ensembles rencontrant tout produit de deux G_δ denses. Un exemple de tels ensembles est le graphe d'une fonction continue et ouverte de domaine et d'image ouverts-fermés non vides. Dans la suite, les G_n et G seront de tels graphes. Les notations et définitions qui suivent paraîssent alors naturelles, avec le rappel qui suit.

Notation. Soient A, B, Z et T des ensembles, $g : A \to B$ une fonction. La notation $G(g)$ désignera le graphe $\mathrm{Gr}(g)$ de g si $A \times B \subseteq Z \times T$, et $\{(z,t) \in Z \times T \ / \ (t,z) \in \mathrm{Gr}(g)\}$ si $A \times B \subseteq T \times Z$. On a donc $G(g) \subseteq Z \times T$ dans les deux cas.

Définition 2.2 *On dit que* $(Z, T, g, (g_n))$ *est une* $situation\ générale$ *si*

(a) Z *et* T *sont des espaces polonais parfaits de dimension* 0.

(b) g *et* g_n *sont des fonctions continues et ouvertes de domaine ouvert-fermé non vide de* Z *et d'image ouverte-fermée de* T, *ou de domaine ouvert-fermé non vide de* T *et d'image ouverte-fermée de* Z.

(c) La suite $(G(g_n))$ *converge vers* $G(g)$.

Il est démontré le théorème suivant dans [Le2] (cf théorème 2.3) :

Théorème 2.3 *Soient* X *et* Y *des espaces polonais,* A *un borélien pot*$(\mathbf{\Sigma}^0_3)$ *et pot*$(\mathbf{\Pi}^0_3)$ *de* $X \times Y$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le borélien A *n'est pas pot*$(\mathbf{\Pi}^0_1)$.

(b) Il existe une situation générale $(Z, T, g, (g_n))$ *et des injections continues* $u : Z \to X$ *et* $v : T \to Y$ *telles que* $\overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_n)} \cap (u \times v)^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\omega} G(g_n)$.

Dans ce résultat, la situation générale $(Z,T,g,(g_n))$ dépend de A, même si elle est toujours du même type. Dans le résultat qu'on cherche à obtenir, annoncé dans l'introduction, le borélien A_1 est indépendant de A. On cherche donc essentiellement à obtenir un théorème d'interversion de quantificateurs, c'est-à-dire une version uniforme du théorème précédent. Après ce rappel, il nous faut encore du vocabulaire.

Définition 2.4 *On dit que $(Z,(g_n))$ est une $bonne\ situation$ si*

(a) Z est un fermé parfait non vide de ω^ω.

(b) g_n est un homéomorphisme de domaine et d'image ouverts-fermés de Z. De plus, $\alpha <_{lex} g_n(\alpha)$ si $\alpha \in D_{g_n}$.

(c) La suite $(Gr(g_n))$ converge vers la diagonale $\Delta(Z)$.

Notations. Soit $Z \subseteq \omega^\omega$. On note N_s l'ouvert-fermé de base de Z associé à $s \in \omega^{<\omega}$:

$$N_s := \{\alpha \in Z \ / \ s \prec \alpha\}.$$

• Soit $(Z,(f_n))$ une bonne situation, $f_\emptyset := \mathrm{Id}_Z$ et $\mathcal{R}$ la relation sur $\omega^{<\omega}$ definie comme suit :

$$s \,\mathcal{R}\, t \ \Leftrightarrow \ |s| = |t| \text{ et } (N_s \times N_t) \cap \left(\mathrm{Gr}(f_\emptyset) \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Gr}(f_n)\right) \neq \emptyset.$$

• Si $s \,\mathcal{R}\, t$, on pose

$$m(s,t) := \min\{m \in \omega \ / \ \exists\, w \in \{\emptyset\} \cup \omega \quad |w| = m \ \text{ et } \ (N_s \times N_t) \cap \mathrm{Gr}(f_w) \neq \emptyset\},$$

$$n(s,t) := \min\{n \in \omega \ / \ s\lceil n \,\mathcal{R}\, t\lceil n \ \text{ et } \ m(s,t) = m(s\lceil n, t\lceil n)\}.$$

• On pose $s \ \mathcal{T} \ t \ \Leftrightarrow \ s \ \mathcal{R} \ t \ \text{ ou } \ t \ \mathcal{R} \ s$. On dira que $c \in (\omega^{<\omega})^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ est une $\mathcal{T}$-*chaîne* si $\forall\, i < |c|-1 \ \ c(i) \ \mathcal{T} \ c(i+1)$.

• On définit $\mathcal{E}$ comme étant la relation d'équivalence engendrée par $\mathcal{R}$:

$$s \,\mathcal{E}\, t \Leftrightarrow \exists\, c \ \ \mathcal{T}\text{-chaîne } \ c(0) = s \ \text{ et } \ c(|c|-1) = t.$$

Définition 2.5 *On dit que $(Z,(f_n))$ est une $très\ bonne\ situation$ si*

(a) $(Z,(f_n))$ est une bonne situation.

(b) Si c est une $\mathcal{T}$-chaîne telle que $|c| \geq 3$, $c(0) = c(|c|-1)$, et $c(i) \neq c(i+1)$ si $i < |c|-1$, alors il existe $i < |c|-2$ tel que $c(i) = c(i+2)$.

Théorème 2.6 *Soient $(Z,(g_n))$ une bonne situation et $(\omega^\omega,(f_n))$ une très bonne situation. On suppose que les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{E}$ associée à $(\omega^\omega,(f_n))$ sont finies. Alors il existe une fonction continue $u : \omega^\omega \to Z$ telle que*

$$\overline{\bigcup_{n\in\omega} Gr(f_n)} \cap (u\times u)^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} Gr(g_n)\right) = \bigcup_{n\in\omega} Gr(f_n).$$

Démonstration. On va construire

- Une suite $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts-fermés non vides de Z.
- Une fonction Φ : $\{(s,t)\in\omega^{<\omega}\times\omega^{<\omega}\ /\ |s|=|t|\}\to\{\emptyset\}\cup\omega$.

On notera, si $s\ \mathcal{R}\ t$, $w(s,t):=\Phi(s\lceil n(s,t),t\lceil n(s,t))$. On demande à ces objets de vérifier

$$\begin{array}{l} (i)\ \ U_{s^\frown i}\subseteq U_s\\ (ii)\ \ \delta(U_{s^\frown i})\leq 2^{-|s|-1}\\ (iii)\ s\ \mathcal{R}\ t\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|w(s,t)|=m(s,t)\\ U_t=g_{w(s,t)}[U_s]\end{array}\right.\end{array}$$

• Admettons ceci réalisé. Soit α dans ω^ω. Comme pour $q>0$, $\delta(U_{\alpha\lceil q})<2^{-q}$, $(U_{\alpha\lceil q})_q$ est une suite décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers 0. On peut donc définir $u:\omega^\omega\to Z$ par la formule $\{u(\alpha)\}=\bigcap_{q\in\omega}U_{\alpha\lceil q}$, et u est continue. Montrons que si (α,β) est dans $\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{Gr}(f_n)$, alors $(u(\alpha),u(\beta))$ est dans $\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{Gr}(g_n)$. Soit donc n entier tel que $(\alpha,\beta)\in\mathrm{Gr}(f_n)$; on peut trouver un entier naturel m_0 tel que $(N_{\alpha\lceil m_0}\times N_{\beta\lceil m_0})\cap\mathrm{Gr}(f_\emptyset)=\emptyset$. Alors si $m\geq m_0$, on a $\alpha\lceil m\ \mathcal{R}\ \beta\lceil m$ et on a les égalités $m(\alpha\lceil m,\beta\lceil m)=m(\alpha\lceil m_0,\beta\lceil m_0)=1$. Posons $n_0:=n(\alpha\lceil m_0,\beta\lceil m_0)$. Si $p\geq n_0$, on a $m(\alpha\lceil p,\beta\lceil p)=m(\alpha\lceil n_0,\beta\lceil n_0)$ et $n(\alpha\lceil p,\beta\lceil p)=n(\alpha\lceil n_0,\beta\lceil n_0)=n_0$. Posons $s:=\alpha\lceil n_0$ et $t:=\beta\lceil n_0$. Par (iii), $|\Phi(s,t)|=m(s,t)=m(\alpha\lceil m_0,\beta\lceil m_0)=1$. On a

$$g_{\Phi(s,t)}(u(\alpha))\in g_{\Phi(s,t)}[\bigcap_{n\geq n_0}U_{\alpha\lceil n}]\subseteq\bigcap_{n\geq n_0}g_{\Phi(s,t)}[U_{\alpha\lceil n}]=\bigcap_{n\geq n_0}U_{\beta\lceil n}=\{u(\beta)\}.$$

D'où $(u(\alpha),u(\beta))\in\mathrm{Gr}(g_{\Phi(s,t)})$. Si $(\alpha,\beta)\in\overline{\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{Gr}(f_n)}\setminus(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{Gr}(f_n))$, $\alpha=\beta$ et $u(\alpha)=u(\beta)$. Donc $(u(\alpha),u(\beta))\notin\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{Gr}(g_n)$.

• Montrons donc que la construction est possible. On pose $\Phi(\emptyset,\emptyset):=\emptyset$ et $U_\emptyset:=Z$. Admettons avoir construit U_s et $\Phi(s,t)$ pour $|s|$, $|t|\leq p$ vérifiant (i)-(iii), et soient $s\in\omega^p$ et $i\in\omega$. Posons

$$d:\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{E}(s^\frown i)\times\mathcal{E}(s^\frown i)\to\omega & \\ (x,y) & \mapsto\ \min\{|c|-1\ /\ c\ \ \mathcal{T}\text{-chaîne},\ c(0)=x\ \text{ et }\ c(|c|-1)=y\}\end{array}\right.$$

Si $k\in\omega$, on pose $H_k:=\{z\in\mathcal{E}(s^\frown i)\ /\ d(z,s^\frown i)=k\}$. Alors H_k et le nombre de H_k non vides sont finis, puisque les classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ sont supposées finies. De plus, H_k est non vide si H_{k+1} l'est, donc on peut trouver q tel que H_0, ...,H_q soient non vides et H_k soit vide si $k>q$. Posons

$$H_k:=\{z_{(k,1)},...,z_{(k,p_k)}\},\ \phi:\left\{\begin{array}{ll}\bigcup_{k\leq q}\{k\}\times\{1,...,p_k\}\to\omega & \\ (k,r) & \mapsto(\Sigma_{i<k}\ p_i)+r\end{array}\right.$$

On a donc $\mathrm{Im}(\phi)=\{1,...,p_0,p_0+1,...,p_0+p_1,...,p_0+...+p_{q-1}+1,...,p_0+...+p_q\}$.

On va construire par récurrence sur $n\in\{1,...,p_0+...+p_q\}$, et pour $k\in\{1,...,n\}$, des ouverts-fermés non vides $U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ de Z. Si $z_{\phi^{-1}(k)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(l)}$, on note $w(k,l):=w(z_{\phi^{-1}(k)},z_{\phi^{-1}(l)})$.

On demande aux ouverts-fermés de vérifier

$$\begin{array}{l}(1)\ U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(k)}\lceil p}\\ (2)\ \delta(U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}) \leq 2^{-p-1}\\ (3)\ \text{Si } k,l\in\{1,...,n\} \text{ et } z_{\phi^{-1}(k)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(l)}, \text{ alors}\\ \qquad - |w(k,l)| = m(z_{\phi^{-1}(k)}, z_{\phi^{-1}(l)})\\ \qquad - U^n_{z_{\phi^{-1}(l)}} = g_{w(k,l)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}]\\ (4)\ U^{n+1}_{z_{\phi^{-1}(k)}} \subseteq U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}} \text{ si } k\in\{1,...,n\}\end{array}$$

Admettons cette construction effectuée. Il restera à poser, si $z,\ z'\in\mathcal{E}(s^\frown i)$, $U_z := U_z^{p_0+...+p_q}$, et si $\Phi(z,z')$ n'est pas encore défini, on posera $\Phi(z,z') := \Phi(z\lceil p, z'\lceil p)$. On a

$$U_{z_{\phi^{-1}(k)}} = U^{p_0+...+p_q}_{z_{\phi^{-1}(k)}} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(k)}\lceil p}.$$

La condition (i) est donc réalisée pour toute suite de $\mathcal{E}(s^\frown i)$. La condition (2) entraînera de même que (ii) est réalisée pour toute suite de $\mathcal{E}(s^\frown i)$. Pour (iii), il suffit de remarquer que si $\tilde{s}\ \mathcal{R}\ \tilde{t}$, $\tilde{s}$ et $\tilde{t}$ sont dans la même $\mathcal{E}$-classe, et (3) donne le résultat.

• Montrons donc que cette nouvelle construction est possible. Si $n=1$, $\phi^{-1}(n)$ vaut $(0,1)$ et $z_{\phi^{-1}(n)} = s^\frown i$; on choisit pour $U^1_{z_{(0,1)}}$ un ouvert-fermé non vide de U_s, de diamètre au plus 2^{-p-1}.

Admettons avoir construit les suites finies $U^1_{z_{\phi^{-1}(1)}}$, ..., $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(1)}}$, ..., $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(n-1)}}$, vérifiant (1)-(4), ce qui est fait pour $n=2$. La suite $z_{\phi^{-1}(n)}$ est dans $H_{(\phi^{-1}(n))_0}$, donc on peut trouver une $\mathcal{T}$- chaîne c telle que $c(0) = s^\frown i$, $c(|c|-1) = z_{\phi^{-1}(n)}$ et $|c|-1 = (\phi^{-1}(n))_0$. Comme $p_0 = 1$, $(\phi^{-1}(n))_0 \geq 1$, donc $|c| \geq 2$ et $c(|c|-2) \in H_{(\phi^{-1}(n))_0-1}$; par le choix de ϕ, on peut trouver $m<n$ tel que $c(|c|-2) = z_{\phi^{-1}(m)}$. D'où $z_{\phi^{-1}(n)}\ \mathcal{T}\ z_{\phi^{-1}(m)}$. Notons

$$o := \begin{cases} n(z_{\phi^{-1}(n)}, z_{\phi^{-1}(m)}) & \text{si } z_{\phi^{-1}(n)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(m)},\\ n(z_{\phi^{-1}(m)}, z_{\phi^{-1}(n)}) & \text{si } z_{\phi^{-1}(m)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(n)}.\end{cases}$$

Cas 1. $o < p+1$.

1.1. $z_{\phi^{-1}(m)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(n)}$.

La suite $w(m,n) = \Phi(z_{\phi^{-1}(m)}\lceil o, z_{\phi^{-1}(n)}\lceil o)$ a déjà été définie et on a

$$U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} = g_{w(m,n)}[U_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}}].$$

On choisit, dans $g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}]$, un ouvert-fermé non vide $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ de diamètre au plus 2^{-p-1}. De sorte que (1), (2), et (3) pour $k=l=n$ sont réalisées.

On définit ensuite les $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ pour $1\leq q<n$, par récurrence sur $d(z_{\phi^{-1}(q)}, z_{\phi^{-1}(n)})$: on choisit une $\mathcal{T}$-chaîne e de longueur minimale telle que $e(0) = z_{\phi^{-1}(q)}$ et $e(|e|-1) = z_{\phi^{-1}(n)}$. Comme $|e|\geq 2$, $U^n_{e(1)}$ a été défini et il y a 2 cas. Soit r entier compris entre 1 et n tel que $e(1) = z_{\phi^{-1}(r)}$. Un tel r existe car la condition (b) de la définition d'une très bonne situation entraîne l'unicité d'une $\mathcal{T}$-chaîne sans termes consécutifs identiques allant d'une suite à une autre ; cette $\mathcal{T}$-chaîne est donc de longueur minimale, et la définition de ϕ montre l'existence de r.

1.1.1. $z_{\phi^{-1}(r)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$.

On pose

$$U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{w(r,q)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}].$$

1.1.2. $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(r)}$.

On pose

$$U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g^{-1}_{w(q,r)}(U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}).$$

Montrons que ces définitions sont licites. On a $e(1) = z_{\phi^{-1}(r)}$, où $1 \leq r \leq n$. Si le cas $r = n$ se produit, comme $z_{\phi^{-1}(m)}$ et $z_{\phi^{-1}(q)}$ sont dans $\mathcal{E}(s^\frown i)$, l'unicité de la $\mathcal{T}$-chaîne sans termes consécutifs identiques allant de $s^\frown i$ à $z_{\phi^{-1}(n)}$ montre que $q = m$.

On en déduit que si $r = n$, on est dans le cas 1.1.2 puisqu'on ne peut pas avoir $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} e(1)$ et $e(1) \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$, ces deux suites étant différentes par minimalité de la longueur de v (si $\tilde{s} \mathcal{R} \tilde{t}$, on a que $\tilde{s} \leq_{\text{lex}} \tilde{t}$, par définition d'une très bonne situation).

Dans le cas 1.1.1, on a $r < n$ et $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} = g_{w(r,q)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}}]$, donc $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est un ouvert-fermé non vide de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$, puisque $U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}}$. De même, $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est un ouvert-fermé non vide de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ dans le cas 1.1.2, $r < n$. Si $r = n$, $q = m$ et la même conclusion vaut, par le choix de $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$. D'où la condition (4). Les conditions (1) et (2) pour $k = q$ en découlent.

Vérifions (3). Soient donc $k, l \leq n$ tels que $z_{\phi^{-1}(k)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(l)}$, et $\tilde{c}$ (resp. $\tilde{e}$) la $\mathcal{T}$-chaîne ayant servi à définir $U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ (resp. $U^n_{z_{\phi^{-1}(l)}}$). On a $\tilde{c}(|\tilde{c}| - 1) = \tilde{e}(|\tilde{e}| - 1) = z_{\phi^{-1}(n)}$. Si $|\tilde{c}| = |\tilde{e}| = 1$, $k = l = n$ et (3) a été vérifié. Plus généralement, si $k = l$, (3) est vérifié. Si $|\tilde{c}| = 1$ et $|\tilde{e}| = 2$, la liaison entre $z_{\phi^{-1}(k)}$ et $z_{\phi^{-1}(l)}$ a déjà été prise en compte, par minimalité des longueurs. De même si $|\tilde{c}| = 2$ et $|\tilde{e}| = 1$. Si $|\tilde{c}|$ et $|\tilde{e}|$ sont au moins égaux à 2, par unicité de la $\mathcal{T}$-chaîne sans termes consécutifs identiques allant d'une suite à une autre, on a que $\tilde{c}(1) = \tilde{e}(0)$ ou $\tilde{c}(0) = \tilde{e}(1)$. Là encore, la liaison a été prise en compte. La condition (3) est donc réalisée.

1.2. $z_{\phi^{-1}(n)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(m)}$.

Ce cas est analogue au précédent (on a $U_{z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p} = g_{w(n,m)}[U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}]$, on choisit $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ dans $g^{-1}_{w(n,m)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})$, et seul le cas 1.2.1 est possible si $r = n$).

Cas 2. $o = p + 1$.

2.1. $z_{\phi^{-1}(m)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(n)}$.

Soit $w \in \{\emptyset\} \cup \omega$ tel que $(N_{z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p} \times N_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}) \cap \mathrm{Gr}(f_w) \neq \emptyset$. On peut supposer que

$$|w| = m(z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p, z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p) = 0,$$

et $w = \emptyset$, $z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p = z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p$. Comme $\mathrm{Gr}(g_\emptyset) = \overline{\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Gr}(g_n)} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Gr}(g_n))$, on peut trouver $t \in \omega$ minimal tel que $(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \times U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap \mathrm{Gr}(g_t) \neq \emptyset$, et on a $|t| = m(z_{\phi^{-1}(m)}, z_{\phi^{-1}(n)}) = 1$. On pose alors $\Phi(z_{\phi^{-1}(m)}, z_{\phi^{-1}(n)}) := t$.

On a alors que $g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap g^{-1}_{w(m,n)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})]$ est un ouvert-fermé non vide de $U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}$. On choisit $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ dans cet ouvert-fermé et on raisonne comme en 1.1.

2.2. $z_{\phi^{-1}(n)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(m)}$.

On raisonne comme en 2.1, en choisissant $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ dans $g_t^{-1}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}$ et en posant $\phi(z_{\phi^{-1}(n)}, z_{\phi^{-1}(m)}) := t$. $\square$

(B) L'existence de tests.

Nous donnons maintenant un exemple explicite, comme annoncé dans l'introduction. Nous commenons par un exemple dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$, que nous raffinons ensuite dans un produit $Z_0 \times Z_0$, où Z_0 est plus compliqué à décrire que ω^ω, mais est homéomorphe à 2^ω.

Notations. Soit (q_n) la suite des nombres premiers : $q_0 = 2$, $q_1 = 3$, $q_2 = 5$, ... On pose

$$N : \begin{cases} \omega^{<\omega} \to \omega \\ s \quad \mapsto \begin{cases} q_0^{s(0)+1} \ldots q_{|s|-1}^{s(|s|-1)+1} \text{ si } s \neq \emptyset, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

• La fonction $f_\emptyset$ est l'identité. On pose ensuite

$$f_n : \begin{cases} \{\alpha \in \omega^\omega \ / \ \alpha(n) = 1\} \to \{\alpha \in \omega^\omega \ / \ \alpha(n) = N(\alpha\lceil n^\frown 1)\} \\ \alpha \mapsto \begin{cases} \omega \to \omega \\ p \mapsto \begin{cases} \alpha(p) \text{ si } p \neq n, \\ N(\alpha\lceil (n+1)) \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

• On pose ensuite

$$\mathcal{A}_0 := \{1\},$$
$$\mathcal{A}_{n+1} := \{1\} \cup \{N(s^\frown 1) \ / \ s \in \Pi_{i \leq n} \mathcal{A}_i\} \quad (n \in \omega),$$
$$Z_0 := \Pi_{n \in \omega} \mathcal{A}_n.$$

Alors on voit facilement par récurrence que $\mathcal{A}_n$ est fini et a au moins deux éléments si $n \geq 1$, de sorte que Z_0, muni de la topologie induite par celle de ω^ω, est homéomorphe à 2^ω, comme compact métrisable parfait de dimension 0 non vide. Il est clair que si $\alpha \in Z_0$ et $\alpha(n) = 1$, alors $f_n(\alpha) \in Z_0$, de sorte qu'on peut remplacer ω^ω par Z_0 dans la définition de f_n. On note encore f_n cette nouvelle fonction, le contexte précisant si on travaille dans ω^ω ou dans Z_0.

Théorème 2.7 *(1) Le couple $(\omega^\omega, (f_n))$ une très bonne situation. De plus, les classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ sont finies.*

(2) Le couple $(Z_0, (f_n)_{n>0})$ une très bonne situation. De plus, pour tout entier p, $\Pi_{n<p} \mathcal{A}_n$ est une classe pour $\mathcal{E}$.

Démonstration. Les espaces ω^ω et Z_0 sont fermés parfaits non vides de ω^ω.

• Que ce soit dans ω^ω ou Z_0, f_n est clairement un homéomorphisme de domaine et d'image ouverts-fermés, et on a $\alpha <_{\text{lex}} f_n(\alpha)$ pour tout α de D_{f_n}.

• Si $\alpha \in \omega^\omega$, la suite de terme général $(\alpha\lceil n^\frown 1^\frown(\alpha(n+1), ...), \alpha\lceil n^\frown N(\alpha\lceil n^\frown 1)^\frown(\alpha(n+1), ...))$ converge vers (α, α), de sorte que $(\mathrm{Gr}(f_n))$ converge vers $\Delta(\omega^\omega)$. De même si $\alpha \in Z_0$.

• Montrons maintenant que pour tout entier p, $\Pi_{n<p}\ \mathcal{A}_n$ est une classe pour $\mathcal{E}$. Il suffit de voir que $\mathcal{E}(1^p) = \Pi_{n<p}\ \mathcal{A}_n$. La condition est clairement vérifiée pour $p = 0$: on a $\mathcal{E}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Pour $p = 1$, on a $\mathcal{E}(1^p) = \{1\} = \mathcal{A}_0$ car on considère la suite $(f_n)_{n>0}$, de sorte que la première coordonnée vaut toujours 1. Soit donc $s \in \mathcal{E}(1^{p+1})$. On a bien sûr $s \in \Pi_{n<p+1}\ \mathcal{A}_n$. Réciproquement, si $s \in \Pi_{n<p+1}\ \mathcal{A}_n$, $s\lceil p \in \Pi_{n<p}\ \mathcal{A}_n$, donc par hypothèse de récurrence, on peut trouver une $\mathcal{T}$-chaîne v telle que $v(0) = 1^p$ et $v(|v|-1) = s\lceil p$. On a donc que $(v(i)^\frown s(p))_{i<|v|}$ est une $\mathcal{T}$-chaîne, et donc que $s \in \mathcal{E}(1^{p\frown} s(p))$. D'où le résultat si $s(p) = 1$. Sinon, on peut trouver t dans $\Pi_{n<p}\ \mathcal{A}_n$ telle que $s(p) = N(t^\frown 1)$. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une $\mathcal{T}$- chaîne w telle que $w(0) = 1^p$ et $w(|w|-1) = t$. Comme avant, $(w(i)^\frown 1)_{i<|w|}$ est une $\mathcal{T}$-chaîne, donc $t^\frown 1 \in \mathcal{E}(1^{p+1})$. Donc $t^\frown N(t^\frown 1) \in \mathcal{E}(1^{p+1})$, c'est-à-dire $t^\frown s(p) \in \mathcal{E}(1^{p+1})$. Comme $t \in \mathcal{E}(1^p)$, $t^\frown s(p) \in \mathcal{E}(1^{p\frown} s(p))$ et $s \in \mathcal{E}(1^{p+1})$.

• Montrons maintenant les classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ sont finies. Soit C une $\mathcal{E}$-classe, $t_0 \in C$ et $s_0 \in C$ lexicographiquement minimale. Une telle suite existe car on définit, si $q < |t_0|$, $s_0(q)$ comme étant $\min\{s(q)\ /\ s \in C$ et $s\lceil q = s_0\lceil q\}$. On montre par récurrence sur $i < |s_0|$ que

$$(i)\ \ \mathcal{E}(s_0\lceil(i+1)) \text{ est finie.}$$
$$(ii)\ \forall\ s \in \mathcal{E}(s_0\lceil(i+1))\ \ s(i) \in \{s_0(i)\} \cup \{N(u^\frown s_0(i))\ /\ u \in \mathcal{E}(s_0\lceil i)\}.$$

Si $i = 0$, $\mathcal{E}(s_0(0)) = \{s_0(0)\}$ si $s_0(0) \neq 1$, et $\{s_0(0)\} \cup \{N(1)\}$ sinon, d'où le résultat. Admettons ce résultat pour $i < j < |s_0|$, ce qui est vérifié pour $j = 1$. Montrons-le pour j, ce qui prouvera que C est finie.

Soit $\tilde{t} \in \mathcal{E}(s_0\lceil(j+1))$; il existe une $\mathcal{T}$-chaîne u telle que $u(0) = \tilde{t}$ et $u(|u|-1) = s_0\lceil(j+1)$. Si $i < |u|-1$, comme $u(i)\ \mathcal{T}\ u(i+1)$, $u(i)\lceil j\ \mathcal{T}\ u(i+1)\lceil j$, donc $u(i)\lceil j\ \mathcal{E}\ u(i+1)\lceil j$ et $\tilde{t}\lceil j\ \mathcal{E}\ s_0\lceil j$.

Montrons (ii) ; (i) s'en déduira car $s\lceil j \in \mathcal{E}(s_0\lceil j)$ qui est fini par hypothèse de récurrence, et car $s(j)$ est dans un ensemble fini. On montre que

$$\forall\ s, t \in \mathcal{E}(s_0\lceil(j+1))\ \ t(j) \neq s_0(j) \text{ ou } s(j) \in \{s_0(j)\} \cup \{N(u^\frown s_0(j))\ /\ u \in \mathcal{E}(s_0\lceil j)\}.$$

On procède par récurrence sur $d(s,t)$. C'est clair pour $d(s,t) = 0$. Soient $s, t \in \mathcal{E}(s_0\lceil(j+1))$ telles que $d(s,t) = k+1$. Soit e une $\mathcal{T}$-chaîne telle que $e(0) = t$, $e(|e|-1) = s$ et $|e| = k+2$. Soit $i < |e|$ maximal tel que $e(i)(j) = s_0(j)$. Si $i > 0$, par hypothèse de récurrence, on a le résultat. On peut donc supposer que si $1 \leq i < |e|$, $e(i)(j) \neq s_0(j)$.

Par conséquent, $e(1)(j) \neq s_0(j)$ et $e(0)(j) = t(j) = s_0(j)$, donc $s_0(j)$ a été modifié en $N(t\lceil j^\frown s_0(j))$, par minimalité de s_0.

En effet, on remarque que si $x \mathrel{\mathcal{R}} y$, alors $\forall\, l \in \omega \setminus \{0\}$, $x^\frown l \mathrel{\mathcal{R}} y^\frown l$. Comme $t\lceil j \mathrel{\mathcal{E}} s_0\lceil j$,

$$e(1) = t\lceil j^\frown e(1)(j) \mathrel{\mathcal{E}} s_0\lceil j^\frown e(1)(j)$$

et si on pose $s'_0 := < s_0(j+1), ..., s_0(|s_0|-1) >$, on a $e(1)^\frown s'_0 \mathrel{\mathcal{E}} s_0$ et $e(1)^\frown s'_0 \mathrel{\mathcal{E}} s_0\lceil j^\frown e(1)(j)^\frown s'_0$. Donc $e(1)(j) \geq s_0(j)$ et $e(1)(j) > s_0(j)$. Pour transformer à nouveau $e(1)(j)$, on ne peut que revenir à $s_0(j)$, ce qui est exclus. Donc $e(1)(j)$ reste fixe dans la suite et vaut $s(j)$. L'entier $s(j)$ a donc la forme voulue. D'où (ii), avec $t = s_0\lceil(j+1)$.

• Montrons maintenant que $(\omega^\omega, (f_n))$ une très bonne situation. Nous voulons montrer que si c est une $\mathcal{T}$-chaîne telle que $|c| \geq 3$, $c(0) = c(|c|-1)$, et $c(i) \neq c(i+1)$ si $i < |c|-1$, alors il existe $i < |c|-2$ tel que $c(i) = c(i+2)$.

Soit c un contre-exemple de longueur minimale, et tel que $l := |c(0)|$ soit minimale elle aussi. Alors nécessairement la suite $(c(i)(l-1))_{i<|c|}$ est non constante, et on trouve i_1 minimal tel que $c(i_1)(l-1) \neq c(i_1+1)(l-1)$; il y a alors deux cas.

Ou bien $c(i_1)(l-1) < c(i_1+1)(l-1)$, auquel cas comme on a les égalités

$$c(i_1)(l-1) = c(0)(l-1) = c(|c|-1)(l-1),$$

on trouve $i_2 > i_1+1$ minimal tel que l'on ait $c(i_1+1)(l-1) \neq c(i_2)(l-1)$. Comme avant, on voit que $c(i_1)(l-1) = c(i_2)(l-1)$, et en fait $c(i_1) = c(i_2)$. Donc $i_1 = 0$ et $i_2 = |c|-1$, par minimalité de $|c|$. Par minimalité encore, $|c| = 3$, ce qui constitue la contradiction cherchée (on a $c(i_1+1) = c(i_2-1)$ car il existe un unique entier n tel que $c(i_1)^\frown 1^\omega \in A_n$, avec $n = l-1$; par suite, $c(i_1+1)^\frown 1^\omega = f_n(c(i_1)^\frown 1^\omega) = f_n(c(i_2)^\frown 1^\omega) = c(i_2-1)^\frown 1^\omega$).

Ou bien $c(i_1)(l-1) > c(i_1+1)(l-1)$, auquel cas on trouve $i_2 > i_1+1$ minimal tel que $c(i_2)(l-1) = ... = c(|c|-1)(l-1)$. On a $c(i_1+1) = c(i_2-1)$, donc $c(i_1) = c(i_2)$ comme avant. D'où $i_1 = 0$ et $i_2 = |c|-1$, par minimalité de $|c|$. Par minimalité encore, $|c| = 3$, ce qui constitue la contradiction cherchée.

• Il reste à voir que $(Z_0, (f_n)_{n>0})$ une très bonne situation pour achever la preuve du théorème. Mais ceci se voit comme précédemment. $\square$

Théorème 2.8 *Soit $(Z, T, g_\emptyset, (g_n))$ une situation générale. Alors il existe $u : \omega^\omega \to Z$ et $v : \omega^\omega \to T$ continues telles que*

$$\overline{\bigcup_{n\in\omega} Gr(f_n)} \cap (u \times v)^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} G(g_n)\right) = \bigcup_{n\in\omega} Gr(f_n).$$

Démonstration. On utilisera des notations analogues à celles de la preuve du théorème 2.6, et le même schéma de démonstration. Les nuances sont les suivantes.

• On va noter $\tilde{A}_\emptyset$ (resp. $\tilde{B}_\emptyset$, $\tilde{A}_n$) le domaine de $g_\emptyset$ (resp. l'image de $g_\emptyset$, le domaine de g_n).

• On va construire

- Une suite $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts non vides de Z, inclus dans $\tilde{A}_\emptyset$ ou $\tilde{B}_\emptyset$.
- Une suite $(V_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts non vides de T, inclus dans $\tilde{A}_\emptyset$ ou $\tilde{B}_\emptyset$.
- Une fonction Φ : $\{(s,t)\in\omega^{<\omega}\times\omega^{<\omega}\ /\ |s|=|t|\}\to\{\emptyset\}\cup\omega$.

On demande à ces objets de vérifier

$$\begin{array}{l} (i)\ \ \overline{U_{s^\frown i}}\times\overline{V_{s^\frown i}}\subseteq U_s\times V_s\\ (ii)\ \ \delta(U_{s^\frown i}),\delta(V_{s^\frown i})\leq 2^{-|s|-1}\\ (iii)\ s\ \mathcal{R}\ t\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} |w(s,t)|=m(s,t)\\ V_t=g_{w(s,t)}[U_s]\text{ si }\tilde{A}_{w(s,t)}\subseteq Z\\ U_s=g_{w(s,t)}[V_t]\text{ si }\tilde{A}_{w(s,t)}\subseteq T\end{array}\right.\end{array}$$

• Admettons ceci réalisé. On définit $u:\omega^\omega\to Z$ et $v:\omega^\omega\to T$ par les formules

$$\{u(\alpha)\}=\bigcap_{q\in\omega}U_{\alpha\lceil q},$$

$\{v(\alpha)\}=\bigcap_{q\in\omega}V_{\alpha\lceil q}$. Montrons que si $(\alpha,\beta)\in\bigcup_{n\in\omega}\text{Gr}(f_n)$ (resp. $\text{Gr}(f_\emptyset)$), alors $(u(\alpha),v(\beta))$ est dans $\bigcup_{n\in\omega}G(g_n)$ (resp. $G(g_\emptyset)$). Soit donc w dans $\{\emptyset\}\cup\omega$ tel que $(\alpha,\beta)\in\text{Gr}(f_w)$; on peut trouver un entier naturel m_0 tel que $(N_{\alpha\lceil m_0}\times N_{\beta\lceil m_0})\cap\bigcup_{s\in\{\emptyset\}\cup\omega,|s|<|w|}\text{Gr}(f_s)=\emptyset$. Alors si $m\geq m_0$, on a $\alpha\lceil m\ \mathcal{R}\ \beta\lceil m$ et on a l'égalité $m(\alpha\lceil m,\beta\lceil m)=m(\alpha\lceil m_0,\beta\lceil m_0)=|w|$. Par (iii), on a

$$|\Phi(s,t)|=m(s,t)=m(\alpha\lceil m_0,\beta\lceil m_0)=|w|=\begin{cases}0\text{ si }\beta=f_\emptyset(\alpha),\\ 1\text{ si }\exists\ n\ \ \beta=f_n(\alpha).\end{cases}$$

Si $\tilde{A}_{\Phi(s,t)}\subseteq Z$, on a

$$g_{\Phi(s,t)}(u(\alpha))\in g_{\Phi(s,t)}[\bigcap_{n\geq n_0}U_{\alpha\lceil n}]\subseteq\bigcap_{n\geq n_0}g_{\Phi(s,t)}[U_{\alpha\lceil n}]=\bigcap_{n\geq n_0}V_{\beta\lceil n}=\{v(\beta)\}.$$

Si $\tilde{A}_{\Phi(s,t)}\subseteq T$, on a

$$g_{\Phi(s,t)}(v(\beta))\in g_{\Phi(s,t)}[\bigcap_{n\geq n_0}V_{\beta\lceil n}]\subseteq\bigcap_{n\geq n_0}g_{\Phi(s,t)}[V_{\beta\lceil n}]=\bigcap_{n\geq n_0}U_{\alpha\lceil n}=\{u(\alpha)\}.$$

D'où $(u(\alpha),v(\beta))\in G(g_{\Phi(s,t)})$.

• Montrons donc que la construction est possible. On pose

$$\Phi(\emptyset,\emptyset):=\emptyset\ \text{ et }\ (U_\emptyset,V_\emptyset):=\begin{cases}(\tilde{A}_\emptyset,\tilde{B}_\emptyset)\text{ si }\tilde{A}_\emptyset\subseteq Z,\\ (\tilde{B}_\emptyset,\tilde{A}_\emptyset)\text{ si }\tilde{A}_\emptyset\subseteq T.\end{cases}$$

Par le théorème 2.7, les classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ sont finies. On peut donc définir H_k et ϕ comme dans la preuve du théorème 2.6. On va construire par récurrence sur $n \in \{1, ..., p_0 + ... + p_q\}$, et pour $k \in \{1, ..., n\}$, des ouverts non vides $U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ (resp. $V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$) de Z (resp. T). On demande aux ouverts de vérifier

(1) $\overline{U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}} \times \overline{V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(k)}\lceil p} \times V_{z_{\phi^{-1}(k)}\lceil p}$
(2) $\delta(U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}), \delta(V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}) \leq 2^{-p-1}$
(3) Si $k, l \in \{1, ..., n\}$ et $z_{\phi^{-1}(k)} \mathrel{\mathcal{R}} z_{\phi^{-1}(l)}$, alors
 – $|w(k,l)| = m(z_{\phi^{-1}(k)}, z_{\phi^{-1}(l)})$
 – si $\tilde{A}_{w(k,l)} \subseteq Z$, alors $V^n_{z_{\phi^{-1}(l)}} = g_{w(k,l)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}]$
 – si $\tilde{A}_{w(k,l)} \subseteq T$, alors $U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}} = g_{w(k,l)}[V^n_{z_{\phi^{-1}(l)}}]$
(4) $U^{n+1}_{z_{\phi^{-1}(k)}} \times V^{n+1}_{z_{\phi^{-1}(k)}} \subseteq U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}} \times V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ si $k \in \{1, ..., n\}$

• Montrons donc que cette nouvelle construction est possible. Si $n = 1$, on choisit pour $U^1_{z(0,1)}$ un ouvert non vide de $\tilde{A}_\emptyset$, de diamètre au plus 2^{-p-1}, tel que $\delta(g_\emptyset[U^1_{z(0,1)}]) \leq 2^{-p-1}$, $\overline{g_\emptyset[U^1_{z(0,1)}]} \subseteq V_s$ et $\overline{U^1_{z(0,1)}} \subseteq U_s$, et on pose $V^1_{z(0,1)} := g_\emptyset[U^1_{z(0,1)}]$. Ceci si $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$. Si $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$, on choisit pour $V^1_{z(0,1)}$ un ouvert non vide de $\tilde{A}_\emptyset$, de diamètre au plus 2^{-p-1}, tel que $\delta(g_\emptyset[V^1_{z(0,1)}]) \leq 2^{-p-1}$, $\overline{g_\emptyset[V^1_{z(0,1)}]} \subseteq U_s$ et $\overline{V^1_{z(0,1)}} \subseteq V_s$, et on pose $U^1_{z(0,1)} := g_\emptyset[V^1_{z(0,1)}]$.

Admettons avoir construit les suites finies $U^1_{z_{\phi^{-1}(1)}}$, $V^1_{z_{\phi^{-1}(1)}}$, ..., $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(1)}}$, $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(1)}}$, ..., $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(n-1)}}$, $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(n-1)}}$ vérifiant (1)-(4).

Cas 1. $o < p + 1$.

1.1. $z_{\phi^{-1}(m)} \mathrel{\mathcal{R}} z_{\phi^{-1}(n)}$ et $\tilde{A}_{w(m,n)} \subseteq Z$.

La suite $w(m,n) = \Phi(z_{\phi^{-1}(m)}\lceil o, z_{\phi^{-1}(n)}\lceil o)$ a déjà été définie et on a

$$V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} = g_{w(m,n)}[U_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}}].$$

1.1.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On choisit, dans $U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \cap g_\emptyset^{-1}(g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}])$, un ouvert non vide $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ tel que

$$\overline{U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}} \times \overline{g_\emptyset[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \times V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}},$$

$\delta(U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}) \leq 2^{-p-1}$ et également $\delta(g_\emptyset[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]) \leq 2^{-p-1}$. On pose $V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}} := g_\emptyset[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]$, de sorte que (1), (2), et (3) pour $k = l = n$ sont réalisées.

On définit ensuite les $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ et $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ pour $1 \leq q < n$, par récurrence sur $d(z_{\phi^{-1}(q)}, z_{\phi^{-1}(n)})$. On choisit une $\mathcal{T}$-chaîne e de longueur minimale telle que $e(0) = z_{\phi^{-1}(q)}$ et $e(|e| - 1) = z_{\phi^{-1}(n)}$. Comme $|e| \geq 2$, $U^n_{e(1)}$ et $V^n_{e(1)}$ ont été définis et il y a 4 cas. Soit r entier compris entre 1 et n tel que $e(1) = z_{\phi^{-1}(r)}$.

1.1.1.1. $z_{\phi^{-1}(r)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$ et $\tilde{A}_{w(r,q)} \subseteq Z$.

On pose

$$\begin{cases} V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{w(r,q)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}], \\ U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g_\emptyset^{-1}(V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}). \end{cases}$$

1.1.1.2. $z_{\phi^{-1}(r)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$ et $\tilde{A}_{w(r,q)} \subseteq T$.

On pose

$$\begin{cases} V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g^{-1}_{w(r,q)}(U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}), \\ U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g_\emptyset^{-1}(V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}). \end{cases}$$

1.1.1.3. $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(r)}$ et $\tilde{A}_{w(q,r)} \subseteq Z$.

On pose

$$\begin{cases} U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g^{-1}_{w(q,r)}(V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}), \\ V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_\emptyset[U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}]. \end{cases}$$

1.1.1.4. $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(r)}$ et $\tilde{A}_{w(q,r)} \subseteq T$.

On pose

$$\begin{cases} U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{w(q,r)}[V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}], \\ V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_\emptyset[U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}]. \end{cases}$$

Montrons que ces définitions sont licites. Si $r = n$, on est dans le cas 1.1.1.3.

Dans le cas 1.1.1.1, $U^n_{e(1)} \subseteq U^{n-1}_{e(1)}$ et $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} = g_{w(r,q)}[U^{n-1}_{e(1)}]$. Par suite, la définition de $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est licite, et c'est un ouvert non vide de $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. On a $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$, $n(z_{\phi^{-1}(q)}, z_{\phi^{-1}(q)}) = 0$ et $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$. On en déduit que $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} = g_\emptyset[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$, et que $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est un ouvert non vide de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$, bien défini.

Dans le cas 1.1.1.2, la définition de $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est licite, et c'est un ouvert de $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. De même, la définition de $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est licite, et c'est un ouvert de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. Comme dans le cas précédent, la non-vacuité de $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ entraîne celle de $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. Celle de $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ résulte du fait que

$$U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}} = g_{w(r,q)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$$

et $U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}}$.

Dans le cas 1.1.1.3, la définition de $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est licite, et c'est un ouvert de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$, donc de $U_{z_{\phi^{-1}(q)}\lceil p}$ et de $\tilde{A}_\emptyset$. Par suite, la définition de $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est licite, et c'est un ouvert de $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. La non-vacuité de $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ entraîne celle de $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. Celle de $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ résulte du fait que

$$V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}} = g_{w(q,r)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$$

et $V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}}$, si $r < n$.

Si $r = n$, on a $U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(r)}\lceil p} \cap g^{-1}_{\emptyset}(g_{w(q,r)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}])$, par le choix de $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$, puisque $q = m$. D'où $V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq g_{w(q,r)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$ et $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est non vide.

Dans le cas 1.1.1.4, on a $V^n_{e(1)} \subseteq V^{n-1}_{e(1)}$ et $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} = g_{w(q,r)}[V^{n-1}_{e(1)}]$. Par suite, la définition de $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est licite, et c'est un ouvert non vide de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$. On a comme en 1.1.1.1 que

$$V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} = g_{\emptyset}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}],$$

et que $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ est un ouvert non vide de $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$, bien défini.

On a donc montré que dans les 4 cas, $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ (resp. $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}$) est un ouvert non vide de $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ (resp. $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$), bien défini. D'où (4). Vérifions (3) ; si $k = l$, (3) est vérifié : c'est clair dans les cas 1.1.1.3 et 1.1.1.4, et dans les deux autres cas, on a clairement $g_{w(k,k)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}] \subseteq V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$; si $y \in V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$, $y \in V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ et il existe $x \in U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ tel que $y = g_{\emptyset}(x)$. Par suite, $x \in U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ et $V^n_{z_{\phi^{-1}(k)}} = g_{\emptyset}[U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}] = g_{w(k,k)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}]$. La condition (3) est donc réalisée (c'est clair dans les cas 1.1.1.1 et 1.1.1.4 ; dans le cas 1.1.1.2, on utilise le fait que $U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}$ est inclus dans $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}}$; dans le cas 1.1.1.3, on utilise le fait que $V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}$ est inclus dans $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(r)}}$ si $r < n$; si $r = n$, on utilise le fait que $V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}$ est inclus dans $g_{w(q,r)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$).

1.1.2. $\tilde{A}_{\emptyset} \subseteq T$.

On a $g_{\emptyset}[g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}]] \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}$, donc $g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}] \cap g^{-1}_{\emptyset}(U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p})$ est non vide. On choisit, dans cet ouvert non vide, un ouvert $V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ non vide tel que l'on ait l'inclusion $\overline{g_{\emptyset}[V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]} \times \overline{V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \times V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}$, $\delta(V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}) \leq 2^{-p-1}$ et

$$\delta(g_{\emptyset}[V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]) \leq 2^{-p-1}.$$

On pose $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}} := g_{\emptyset}[V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]$, de sorte que (1), (2), et (3) pour $k = l = n$ sont réalisées.

On procède alors de manière analogue à celle du cas 1.1.1 ; là encore, on trouve 4 cas.

1.1.2.1. $z_{\phi^{-1}(r)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$ et $\tilde{A}_{w(r,q)} \subseteq Z$.

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{w(r,q)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}], \\ U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{\emptyset}[V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}]. \end{array} \right.$$

1.1.2.2. $z_{\phi^{-1}(r)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(q)}$ et $\tilde{A}_{w(r,q)} \subseteq T$.

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g^{-1}_{w(r,q)}(U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}), \\ U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{\emptyset}[V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}]. \end{array} \right.$$

1.1.2.3. $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(r)}$ et $\tilde{A}_{w(q,r)} \subseteq Z$.

On pose

$$\begin{cases} U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g^{-1}_{w(q,r)}(V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}), \\ V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g^{-1}_{\emptyset}(U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}). \end{cases}$$

1.1.2.4. $z_{\phi^{-1}(q)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(r)}$ et $\tilde{A}_{w(q,r)} \subseteq T$.

On pose

$$\begin{cases} U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := g_{w(q,r)}[V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}}], \\ V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} := V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}} \cap g^{-1}_{\emptyset}(U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}}). \end{cases}$$

La vérification des conditions (1) à (4) est alors analogue à celle du cas 1.1.1 ; pour vérifier (3) dans le cas 1.1.2.3, $r = n$, on utilise le fait que $V^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq g_{w(q,r)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$.

1.2. $z_{\phi^{-1}(m)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(n)}$ et $\tilde{A}_{w(m,n)} \subseteq T$.

La suite $w(m,n) = \Phi(z_{\phi^{-1}(m)}\lceil o, z_{\phi^{-1}(n)}\lceil o)$ a déjà été définie et on a

$$U_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}} = g_{w(m,n)}[V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}].$$

1.2.1. $\tilde{A}_{\emptyset} \subseteq Z$.

On choisit, dans $U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \cap g^{-1}_{\emptyset}(g^{-1}_{w(m,n)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}))$, un ouvert non vide $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ tel que

$$\overline{U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}} \times \overline{g_{\emptyset}[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]} \subseteq U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \times V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}},$$

$\delta(U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}) \leq 2^{-p-1}$ et également $\delta(g_{\emptyset}[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]) \leq 2^{-p-1}$. On pose $V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}} := g_{\emptyset}[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]$, de sorte que (1), (2), et (3) pour $k = l = n$ sont réalisées. On procède alors de manière analogue à celle du cas 1.1.1 ; on trouve les 4 mêmes cas qu'en 1.1.1, et on adopte les mêmes définitions. Cette fois-ci, la différence est que si $r = n$, on est dans le cas 1.2.1.4. La vérification des conditions (1) à (4) est alors analogue à celle du cas 1.1.1 ; pour vérifier que $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} \subseteq U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ dans le cas 1.2.1.4, $r = n$, on utilise le fait que $g_{w(q,r)}[g_{\emptyset}[U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}]] \subseteq U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$.

1.2.2. $\tilde{A}_{\emptyset} \subseteq T$.

On a que $g^{-1}_{w(m,n)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap g^{-1}_{\emptyset}(U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p})$ est non vide. On procède alors comme dans le cas 1.1.2 ; on a, dans le cas 1.2.2.4, $r = n$, $U^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} \subseteq U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ puisqu'on a $V^n_{z_{\phi^{-1}(n)}} \subseteq g^{-1}_{w(q,r)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}})$.

1.3. $z_{\phi^{-1}(n)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(m)}$ et $\tilde{A}_{w(n,m)} \subseteq Z$.

La suite $w(n,m) = \Phi(z_{\phi^{-1}(n)}\lceil o, z_{\phi^{-1}(m)}\lceil o)$ a déjà été définie et on a

$$V_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}} = g_{w(n,m)}[U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}].$$

1.3.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On choisit, dans $U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \cap g^{-1}_{w(n,m)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})$, un ouvert non vide $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ comme avant. On procède alors de manière analogue à celle du cas 1.1.1 ; on trouve les 4 mêmes cas qu'en 1.1.1, et on adopte les mêmes définitions. Cette fois-ci, la différence est que si $r = n$, on est dans le cas 1.3.1.1. La vérification des conditions (1) à (4) est alors analogue à celle du cas 1.1.1 ; pour vérifier que $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} \subseteq V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ dans le cas 1.3.1.1, $r = n$, on utilise le fait que $U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq g^{-1}_{w(r,q)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}})$.

1.3.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a que $g^{-1}_\emptyset(g^{-1}_{w(n,m)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})) \cap V_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}$ est non vide. On procède alors comme dans le cas 1.1.2 ; on a, dans le cas 1.3.2.1, $r = n$, $V^n_{z_{\phi^{-1}(q)}} \subseteq V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}$ puisqu'on a $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}} \subseteq g^{-1}_{w(r,q)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}})$.

1.4. $z_{\phi^{-1}(n)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(m)}$ et $\tilde{A}_{w(n,m)} \subseteq T$.

La suite $w(n,m) = \Phi(z_{\phi^{-1}(n)}\lceil o, z_{\phi^{-1}(m)}\lceil o)$ a déjà été définie et on a

$$U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} = g_{w(n,m)}[V_{z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p}].$$

1.4.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On choisit, dans $g_{w(n,m)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}]$, un ouvert non vide $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}}$ comme avant. On procède alors de manière analogue à celle du cas 1.1.1 ; on trouve les 4 mêmes cas qu'en 1.1.1, et on adopte les mêmes définitions. Cette fois-ci, la différence est que si $r = n$, on est dans le cas 1.4.1.2. La vérification des conditions (1) à (4) est alors analogue à celle du cas 1.1.1 ; pour vérifier que la condition (3) est vérifiée dans le cas 1.4.1.2, $r = n$, on utilise le fait que $U^n_{z_{\phi^{-1}(r)}} \subseteq g_{w(r,q)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$.

1.4.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a que $g^{-1}_\emptyset(g_{w(n,m)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}]) \cap V_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}$ est non vide. On procède alors comme dans le cas 1.1.2 ; on a la condition (3) dans le cas 1.4.2.2, $r = n$, puisqu'on a $U^n_{z_{\phi^{-1}(n)}} \subseteq g_{w(r,q)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(q)}}]$.

Cas 2. $o = p + 1$.

2.1. $z_{\phi^{-1}(m)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(n)}$.

Soit $w \in \{\emptyset\} \cup \omega$ tel que $(N_{z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p} \times N_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}) \cap \mathrm{Gr}(f_w) \neq \emptyset$. On peut supposer que

$$|w| = m(z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p, z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p).$$

Par (iii), $|w(z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p, z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p)| = |w| = 0$ et on a $z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p = z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p$. Il y a deux cas.

2.1.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

Le produit $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \times V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}$ rencontre $G(g_\emptyset)$, puisque $V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} = g_\emptyset[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}]$. Comme $G(g_\emptyset) = \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_n)} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} G(g_n))$, on peut trouver $t \in \omega$ minimal tel que

$$(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \times V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap G(g_t) \neq \emptyset,$$

et aussi on a $|t| = m(z_{\phi^{-1}(m)}, z_{\phi^{-1}(n)}) = 1$. On pose alors $\Phi(z_{\phi^{-1}(m)}, z_{\phi^{-1}(n)}) := t$. Il y a 2 cas.

2.1.1.1. $\tilde{A}_{w(m,n)} \subseteq Z$.

On a alors $U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \cap g_\emptyset^{-1}(g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(m,n)}]) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.1.1.

2.1.1.2. $\tilde{A}_{w(m,n)} \subseteq T$.

On a alors $U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \cap g_\emptyset^{-1}(g^{-1}_{w(m,n)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.2.1.

2.1.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a $U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} = g_\emptyset[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}]$. On raisonne alors comme en 2.1.1 (on se réfère à 1.1.2 et 1.2.2 ; dans le cas analogue à 1.1.2, on a $g_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(m,n)}] \cap g_\emptyset^{-1}(U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}) \neq \emptyset$).

2.2. $z_{\phi^{-1}(n)} \mathcal{R} z_{\phi^{-1}(m)}$.

On raisonne comme en 2.1 : il y a deux cas.

2.2.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

2.2.1.1. $\tilde{A}_{w(n,m)} \subseteq Z$.

On a alors $U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \cap g^{-1}_{w(n,m)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.3.1.

2.2.1.2. $\tilde{A}_{w(n,m)} \subseteq T$.

On a alors $g_{w(n,m)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(n,m)}] \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.4.1.

2.2.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On raisonne comme en 2.1.2 et 2.2.1 (on se réfère à 1.3.2 et 1.4.2 ; dans le cas analogue à 1.4.2, on a $g_\emptyset^{-1}(g_{w(n,m)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(n,m)}]) \cap V_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \neq \emptyset$). $\square$

Théorème 2.9 *Il existe un borélien A_1 de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :*
(a) Le borélien A n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \to X$ et $v : 2^\omega \to Y$ telles que $\overline{A_1} \cap (u \times v)^{-1}(A) = A_1$.

Démonstration. Soit $\Phi : 2^\omega \rightarrow Z_0$ un homéomorphisme. On pose

$$A_1 := (\Phi \times \Phi)^{-1} \left(\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n) \right).$$

• Appliquons le théorème 2.3 à $X = Y = 2^\omega$, $A = A_1$, $Z = T = Z_0$, $g = \text{Id}_{Z_0}$, $g_n = f_{n+1}$, et $u = v = \Phi^{-1}$. Ce théorème s'applique car

- A_1 a ses coupes dénombrables, donc est pot$(\mathbf{\Sigma}^0_3)$ et pot$(\mathbf{\Pi}^0_3)$.

- $(Z_0, (f_n)_{n>0})$ est une bonne situation (par 2.7), donc une situation générale puisque les domaines des f_n sont non vides.

- $\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n) = (u \times v)^{-1}(A_1) = (u \times v)^{-1}(A_1) \cap \overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)}$.

On a alors que A_1 n'est pas potentiellement fermé, ce qui montre que (b) implique (a).

• Réciproquement, si A n'est pas potentiellement fermé, le théorème 2.3 nous fournit une situation générale $(Z, T, g_\emptyset, (g_n))$ et des injections continues $\tilde{u} : Z \rightarrow X$ et $\tilde{v} : T \rightarrow Y$ telles que $\overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_n)} \cap (\tilde{u} \times \tilde{v})^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\omega} G(g_n)$. Le théorème 2.8 nous fournit des fonctions continues $u' : \omega^\omega \rightarrow Z$ et $v' : \omega^\omega \rightarrow T$ telles que

$$\overline{\bigcup_{n\in\omega} \text{Gr}(f_n)} \cap (u' \times v')^{-1} \left(\bigcup_{n\in\omega} G(g_n) \right) = \bigcup_{n\in\omega} \text{Gr}(f_n).$$

Soit $\Psi : Z_0 \rightarrow \omega^\omega$ l'injection canonique. On pose

$$\begin{cases} u := \tilde{u} \circ\ u' \circ\ \Psi \circ\ \Phi, \\ v := \tilde{v} \circ\ v' \circ\ \Psi \circ\ \Phi. \end{cases}$$

Alors u et v sont clairement continues, et on a clairement $A_1 \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$. Si $(\alpha, \beta) \in \overline{A_1} \setminus A_1$, $\alpha = \beta$ car $(\text{Gr}(f_n))_{n>0}$ converge vers $\mathit{\Delta}(Z_0)$, donc

$$(u'(\Phi(\alpha)), v'(\Phi(\alpha))) \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_n)} \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} G(g_n) \right) \subseteq \check{(}\tilde{u} \times \tilde{v})^{-1}(A).$$

Par conséquent, $(u(\alpha), v(\beta)) \notin A$. $\square$

Remarques. (a) L'énoncé de ce théorème fournit un exemple de test A_1 dans $2^\omega \times 2^\omega$; mais la preuve nous donne aussi un test dans $Z_0 \times Z_0$, et un autre dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$. Nous donnerons une autre variante de cet exemple, qui se prête plus à généralisation, dans le paragraphe suivant.

(b) On peut déterminer la complexité d'un test comme dans l'énoncé 2.9 : A_1 est $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ non pot$(\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1))$. En effet, avec l'ouvert $A = (2^\omega \times 2^\omega) \setminus \mathit{\Delta}(2^\omega)$, qui n'est pas potentiellement fermé (par la proposition 2.2 de [Le1]), on voit que A_1 est $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Mais un tel A_1 n'est pas pot$(\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1))$.

En effet, avec $A = A_1$, on voit que A_1 n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_1$). Donc si A_1 était pot($\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$), on pourrait trouver une fonction continue $g : 2^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega \times 2^\omega$ telle que l'image réciproque par g de tout ensemble pot($\mathbf{\Sigma}^0_1$) soit pot($\mathbf{\Sigma}^0_1$), et telle que $g^{-1}(A_1) = (2^\omega \times 2^\omega) \setminus \varDelta(2^\omega)$ (cf [Le1], Cor. 4.14.(a)). On aurait donc, avec $l := (u \times v) \circ g$ et $A = D_0$, $g^{-1}(\overline{A_1}) \cap l^{-1}(D_0) = (2^\omega \times 2^\omega) \setminus \varDelta(2^\omega)$ (cf [Le1], Ex. 3.6). Mais comme $g^{-1}(\overline{A_1})$ est fermé de $2^\omega \times 2^\omega$ et contient l'ouvert dense $(2^\omega \times 2^\omega) \setminus \varDelta(2^\omega)$, $g^{-1}(\overline{A_1}) = 2^\omega \times 2^\omega$ et $l^{-1}(D_0) = (2^\omega \times 2^\omega) \setminus \varDelta(2^\omega)$, ce qui contredit la preuve du théorème 3.7 de [Le1].

(C) L'impossibilité de l'injectivité de la réduction.

Nous montrons maintenant qu'il n'est pas possible d'avoir u et v injectives dans le théorème 2.9. Cependant, il y a un cas où on peut avoir l'injectivité de la réduction : quand $A = \bigcup_{n \in \omega} \text{Gr}(g_n)$, où $(Z, (g_n))$ est une situation correcte (voir la définition ci-après).

Définitions 2.10 *(1) On dit que $(Z, (g_n))$ est une $situation\ correcte$ si*

(a) Z est un espace polonais parfait de dimension 0 non vide.

(b) g_n est un homéomorphisme de domaine et d'image ouverts-fermés de Z.

(c) La suite $(Gr(g_n))$ converge vers la diagonale $\varDelta(Z)$.

(2) On dit que $(Z, (g_n))$ est une $situation\ très\ correcte$ si

(a) $(Z, (g_n))$ est une situation correcte.

(b) Pour toute suite finie d'entiers $p_0, ..., p_n$ et pour toute suite finie $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n$ d'éléments de $\{-1, 1\}$, on a l'implication

$$\exists\, U \in \mathbf{\Delta}^0_1\lceil Z\ \ U \neq \emptyset\ \ et\ \ \forall\, z \in U\ \ {g_{p_0}}^{\varepsilon_0} ... {g_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z) = z\ \ \Rightarrow\ \ \exists\, i < n\ \ p_i = p_{i+1}\ \ et\ \ \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}.$$

Par exemple, une bonne situation est une situation correcte.

Lemme 2.11 *Soit $(Z, (g_n))$ une situation correcte. Alors il existe un ouvert-fermé C'_n du domaine de g_n tel que si $g'_n := g_n\lceil C'_n$, $(Z, (g'_n))$ soit une situation très correcte.*

Démonstration. Soit (U_n) une base de la topologie de Z, et $V_n \subseteq U_n$ un ouvert-fermé non vide de diamètre au plus 2^{-n}. On construit par récurrence une suite injective (q_k) d'entiers et un ouvert-fermé non vide C'_{q_k} de C_{q_k} tels que

(1) $\text{Gr}(g'_{q_k}) \subseteq V^2_k$.

(2) Pour toute suite finie $p_0, ..., p_n$ d'éléments de $\{q_0, ..., q_k\}$ et pour toute suite finie $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n$ d'éléments de $\{-1, 1\}$, on a l'implication

$$\exists\, U \in \mathbf{\Delta}^0_1\lceil Z\ \ U \neq \emptyset \text{ et } \forall\, z \in U\ \ {g'_{p_0}}^{\varepsilon_0} ... {g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z) = z\ \ \Rightarrow\ \ \exists\, i < n\ \ p_i = p_{i+1} \text{ et } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}.$$

(3) Il n'y a qu'un nombre fini de compositions d'éléments de $\{g'_{q_0}, ..., g'_{q_k}, {g'_{q_0}}^{-1}, ..., {g'_{q_k}}^{-1}\}$ ayant un domaine de définition non vide.

• Admettons ceci réalisé. Il restera à poser $C'_m := \emptyset$ si $m \notin \{q_k\ /\ k \in \omega\}$ pour avoir le lemme. Supposons donc la construction réalisée pour $l < k$.

Enumérons l'ensemble fini C des compositions d'éléments de $\{g'_{q_0}, ..., g'_{q_{k-1}}, {g'_{q_0}}^{-1}, ..., {g'_{q_{k-1}}}^{-1}\}$ de domaine de définition non vide ne vérifiant pas la conclusion de l'implication de la condition (2) : $C = \{f_1, ..., f_m\}$. On notera D_{f_i} le domaine, nécessairement ouvert-fermé non vide, de f_i. Posons, pour $I \subseteq m$,

$$O_I := \bigcap_{i \in I} D_{f_{i+1}} \cap \bigcap_{i \in m \setminus I} \check{D}_{f_{i+1}}.$$

Alors $(O_I)_{I \subseteq m}$ est une partition de Z en ouverts-fermés, et $\exists I \subseteq m$ tel que $V_k \cap O_I \neq \emptyset$. Posons

$$O' := \{z \in V_k \cap O_I \mathbin{/} \forall\, i \in I \;\; f_{i+1}(z) \neq z\}.$$

Alors O' est ouvert dense de $V_k \cap O_I$, donc par continuité il existe un ouvert-fermé non vide O'' de O' tel que pour i dans I on ait $O'' \cap f_{i+1}[O''] = \emptyset$. Choisissons $q_k \notin \{q_0, ..., q_{k-1}\}$ tel que $\mathrm{Gr}(g_{q_k}) \cap (O'' \times O'') \neq \emptyset$, puis un ouvert-fermé non vide C'_{q_k} de $C_{q_k} \cap O'' \cap g_{q_k}^{-1}(O'')$ tel que $C'_{q_k} \cap g_{q_k}[C'_{q_k}] = \emptyset$.

• La condition (1) est clairement réalisée. Soient $p_0, ..., p_n$ une suite finie d'éléments de $\{q_0, ..., q_k\}$, $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n$ une suite finie d'éléments de $\{-1, 1\}$, U un ouvert-fermé non vide de Z tel que pour z dans U on ait ${g'_{p_0}}^{\varepsilon_0} ... {g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z) = z$, avec $p_i \neq p_{i+1}$ ou $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ pour tout $i < n$. Alors il existe $i \leq n$ tel que $p_i = q_k$, par hypothèse de récurrence ; montrons qu'un tel i est unique. Si tel n'est pas le cas, dans la composition apparaît ${g'_{q_k}}^{\varepsilon_j} {g'_{p_{j+1}}}^{\varepsilon_{j+1}} ... {g'_{p_s}}^{\varepsilon_s} {g'_{q_k}}^{\varepsilon_{s+1}}$, avec $p_l \neq q_k$ si $j < l \leq s$. On a ${g'_{q_k}}^{\varepsilon_{s+1}} ... {g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z) \in O'' \subseteq O_I$. Soit $r < m$ tel que $f_{r+1} = {g'_{p_{j+1}}}^{\varepsilon_{j+1}} ... {g'_{p_s}}^{\varepsilon_s}$; alors $r \in I$ car $f_{r+1}({g'_{q_k}}^{\varepsilon_{s+1}} ... {g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z))$ est défini et ${g'_{q_k}}^{\varepsilon_{s+1}} ... {g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z) \in O_I$. Donc $f_{r+1}({g'_{q_k}}^{\varepsilon_{s+1}} ... {g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(z)) \notin O''$, ce qui est absurde. D'où l'unicité de i. On en déduit l'existence d'un ouvert-fermé non vide de Z sur lequel g'_{q_k} coïncide avec l'une des fonctions f_t ou avec l'identité. Mais ceci contredit le choix de C'_{q_k} et de O''. D'où la condition (2).

Posons $H := \{g'_{q_k}, {g'_{q_k}}^{-1}, \mathrm{Id}_{C'_{q_k}}, \mathrm{Id}_{g'_{q_k}[C'_{q_k}]}\}$. Alors les seules compositions d'éléments de H ayant un domaine définition non vide sont les éléments de H. Par suite, les seules compositions d'éléments de $\{g'_{q_0}, ..., g'_{q_k}, {g'_{q_0}}^{-1}, ..., {g'_{q_k}}^{-1}\}$ ayant un domaine de définition non vide sont de la forme h, f, hf, fh, ou fhg, où f et g sont des compositions d'éléments de

$$\{g'_{q_0}, ..., g'_{q_{k-1}}, {g'_{q_0}}^{-1}, ..., {g'_{q_{k-1}}}^{-1}\}$$

de domaine de définition non vide (on raisonne comme précédemment pour voir qu'il n'y a pas plus d'un élément de H dans une composition) ; elles sont donc en nombre fini. D'où la condition (3) et le lemme. □

Théorème 2.12 *Soit $(Z, (g_n))$ une situation correcte. Alors il existe $u : Z_0 \to Z$ injective continue telle que*

$$\overline{\bigcup_{n>0} Gr(f_n)} \cap (u \times u)^{-1} \left(\bigcup_{n \in \omega} Gr(g_n) \right) = \bigcup_{n>0} Gr(f_n).$$

Démonstration. On utilisera des notations analogues à celles de la preuve du théorème 2.6, et le même schéma de démonstration. Les nuances sont les suivantes. Soit (g'_n) fournie par le lemme 2.11.

• On va construire

- Une suite $(U_s)_{s\in\bigcup_{p\in\omega}\Pi_{n<p}\,\mathcal{A}_n}$ d'ouverts-fermés non vides de Z.
- Une fonction $\Phi : \bigcup_{p\in\omega}[(\Pi_{n<p}\,\mathcal{A}_n)\times(\Pi_{n<p}\,\mathcal{A}_n)] \to \{\emptyset\}\cup\omega$.

On demande à ces objets de vérifier

$$\begin{array}{l} (i)\ \ U_{s^\frown i}\subseteq U_s \\ (ii)\ \ \delta(U_{s^\frown i})\leq 2^{-|s|-1} \\ (iii)\ s\ \mathcal{R}\ t\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} |w(s,t)|=m(s,t) \\ U_t=g'_{w(s,t)}[U_s] \end{array}\right. \\ (iv)\ \ U_{s^\frown n}\cap U_{s^\frown m}=\emptyset \text{ si } n\neq m \end{array}$$

On peut définir $u : Z_0 \to Z$ comme dans la preuve du théorème 2.6, et u est injective continue. Comme Gr$(g'_n)\subseteq$ Gr$(g_n)\subseteq\check{\Delta}(Z)$, la construction permet d'avoir le théorème.

• Montrons donc que la construction est possible. Admettons avoir construit U_s et $\Phi(s,t)$ pour $|s|$, $|t|\leq p$ vérifiant (i)-(iv), et soient $s\in\Pi_{n<p}\,\mathcal{A}_n$ et $i\in\mathcal{A}_p$. On va construire par récurrence sur $n\in\{1,...,p_0+...+p_q\}$, et pour $k\in\{1,...,n\}$, des ouverts-fermés non vides $U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}$ de Z. On demande aux ouverts-fermés de vérifier

$$\begin{array}{l} (1)\ U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}\subseteq U_{z_{\phi^{-1}(k)}\lceil p} \\ (2)\ \delta(U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}})\leq 2^{-p-1} \\ (3)\ \text{Si } k,l\in\{1,...,n\} \text{ et } z_{\phi^{-1}(k)}\ \mathcal{R}\ z_{\phi^{-1}(l)}, \text{ alors} \\ \qquad -\ |w(k,l)|=m(z_{\phi^{-1}(k)},z_{\phi^{-1}(l)}) \\ \qquad -\ U^n_{z_{\phi^{-1}(l)}}=g'_{w(k,l)}[U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}] \\ (4)\ U^{n+1}_{z_{\phi^{-1}(k)}}\subseteq U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}} \text{ si } k\in\{1,...,n\} \\ (5)\ U^n_{z_{\phi^{-1}(k)}}\cap U^n_{z_{\phi^{-1}(l)}}=\emptyset \text{ si } k,l\in\{1,...,n\} \text{ et } k\neq l \end{array}$$

On voit comme dans la preuve du théorème 2.6 que cette construction est suffisante ((iv) résulte du fait que $\Pi_{n\leq p}\,\mathcal{A}_n$ est une classe pour $\mathcal{E}$, comme on l'a vu en 2.7).

Pour avoir la condition (5), on utilise le fait, vu en 2.7, que $(Z_0,(f_n)_{n>0})$ est une très bonne situation. On commence par assurer les conditions (1)-(4) comme dans la preuve du théorème 2.6. Soient donc s et t dans $\Pi_{n\leq p}\,\mathcal{A}_n$, avec $s\neq t$; comme ce produit est une $\mathcal{E}$-classe, il existe une $\mathcal{T}$-chaîne c de longueur minimale telle que $c(0)=s$ et $c(|c|-1)=t$. Soient $n:=|c|-2$, p_i des entiers et ε_i dans $\{-1,1\}$ tels que pour tout α dans $\Pi_{n>p}\,\mathcal{A}_n$, ${f_{p_i}}^{\varepsilon_i}(c(n-i)^\frown\alpha)=c(n-i+1)^\frown\alpha$ (ces objets existent par minimalité de n). Par minimalité de n encore, on a $p_i\neq p_{i+1}$ ou $\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}$ pour tout $i<n$. Comme $(Z_0,(g'_n))$ est une situation très correcte, on peut trouver $x\in U_s$ tel que ${g'_{p_0}}^{\varepsilon_0}...{g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}(x)\neq x$; par suite, il existe un voisinage ouvert-fermé U'_s de x, inclus dans U_s, tel que ${g'_{p_0}}^{\varepsilon_0}...{g'_{p_n}}^{\varepsilon_n}[U'_s]\cap U'_s=\emptyset$. on construit alors à nouveau des ouverts-fermés U'_r, pour r dans $\Pi_{n\leq p}\,\mathcal{A}_n$, par récurrence sur $d(r,s)$, comme dans la preuve du théorème 2.6. On a alors $U'_r\subseteq U_r$ et l'unicité de la $\mathcal{T}$-chaîne allant d'une suite à l'autre (qui résulte de la condition (b) de la définition d'une très bonne situation) montre que $U'_s\cap U'_t=\emptyset$. En un nombre fini d'étapes, on obtient donc la condition (5) en plus des autres conditions (1)-(4). □

Lemme 2.13 *Soient H, K des boréliens de Z_0, et B un borélien de $\bigcup_{n>0}$ Gr(f_n) inclus dans $H\times K$ et non pot$(\mathbf{\Pi}^0_1)$. Alors il existe un borélien Z de $H\cap K$, une topologie τ sur Z, et un borélien C_n de $D_{f_n}\cap Z$ tels que*

(a) La topologie τ est plus fine que la topologie initiale de Z.

(b) Le graphe de la restriction de f_n à C_n est inclus dans B.

(c) Le couple $((Z,\tau),(f_n\lceil C_n)_{n>0})$ est une situation correcte.

Démonstration. Comme $B\subseteq\bigcup_{n>0}$ Gr(f_n), on peut écrire que $B=\bigcup_{n>0}$ Gr$(f_n\lceil E_n)$, où E_n est borélien de Z_0. On peut supposer, pour simplifier l'écriture, que Z_0 est récursivement présenté et que H, K, B, E_n et $f_n\lceil E_n$ sont Δ^1_1. On notera Σ (respectivement Δ) la topologie engendrée par les Σ^1_1 (respectivement Δ^1_1) de Z_0. Posons

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{x\in Z_0\ /\ \omega_1^x=\omega_1^{\text{CK}}\},\\ D &:= \{x\in Z_0\ /\ x\notin\Delta^1_1\},\\ Z &:= \{x\in H\cap K\cap D\cap\Omega\ /\ (x,x)\in\overline{B}^{\Sigma\times\Sigma}\}.\end{aligned}$$

Alors Ω muni de Σ est polonais, donc Ω est borélien de Z_0 et Z aussi (puisque B est Σ^1_1, une double application du théorème de séparation nous donne que $\overline{B}^{\Sigma\times\Sigma}=\overline{B}^{\Delta\times\Delta}$, et on utilise le fait que Δ soit polonaise pour voir que $\overline{B}^{\Sigma\times\Sigma}$ est borélien). On définit τ comme étant la restriction de Σ à Z. Comme Z est Σ^1_1, c'est un ouvert de Ω muni de Σ, donc (Z,τ) est polonais, de dimension 0 car traces des Σ^1_1 sur Ω sont ouverts-fermés de Ω muni de Σ, parfait car inclus dans l'ensemble co-dénombrable D (je renvoie le lecteur à [Lo3] pour les preuves des propriétés de Ω, Δ et Σ utilisées ici et non démontrées).

On va montrer que $Z\neq\emptyset$. Le borélien B n'est pas pot$(\mathbf{\Pi}^0_1)$, donc $B\cap D^2$ non plus puisqu'un borélien de projection dénombrable est pot$(\mathbf{\Delta}^0_1)$ (cf [Le1], remarque 2.1). Soit α tel que D soit $\Delta^1_1(\alpha)$. Alors $D^2\cap\check{B}\cap\overline{B\cap D^2}^{\Delta(\alpha)\times\Delta(\alpha)}\neq\emptyset$, donc contient (x,y). On peut donc trouver (x_n,y_n) dans Gr$(f_{p_n}\lceil E_{p_n})$, où $p_n\in\omega$, tel que (x_n,y_n) converge vers (x,y), pour $\Delta(\alpha)\times\Delta(\alpha)$. Or le graphe de $f_p\lceil E_p$ est fermé dans Z_0 muni de $\Delta(\alpha)\times\Delta(\alpha)$; on peut donc supposer que la suite (p_n) croît strictement vers l'infini, car $(x,y)\notin B$. Par suite $y=x$, et comme H et K sont fermés pour $\Delta(\alpha)$, on a $x\in H\cap K$. On en déduit que $(H\cap K\cap D)^2\cap\check{B}\cap\overline{B\cap D^2}^{\Delta\times\Delta}\neq\emptyset$. Mais ce Σ^1_1 non vide, qui vaut $(H\cap K\cap D)^2\cap\check{B}\cap\overline{B\cap D^2}^{\Sigma\times\Sigma}$, rencontre $\{(x',y')\in Z_0\times Z_0\ /\ \omega_1^{(x',y')}=\omega_1^{\text{CK}}\}\subseteq\Omega^2$, en (x',y'), et en raisonnant comme précédemment, on voit que $x'=y'\in Z$.

Soit (z_n) une suite dense de (Z,τ), et Q_n un Σ^1_1 non vide contenant z_n inclus dans la boule ouverte de centre z_n et de rayon 2^{-n}, au sens de (Z,τ). Alors on construit par récurrence une suite injective d'entiers (q_n) telle que $Q_n^2\cap$Gr$(f_{q_n}\lceil E_{q_n})\neq\emptyset$. On pose alors $C_{q_n}:=E_{q_n}\cap Q_n\cap f_{q_n}^{-1}(Q_n)$, et $C_m:=\emptyset$ si $m\notin\{q_n\ /\ n\in\omega\}$. Les ensembles C_n sont ouverts-fermés de (Z,τ), donc boréliens de Z_0 muni de sa topologie initiale. Les ensembles $f_n[C_n]$ sont Σ^1_1 donc ouverts-fermés de (Z,τ). Les restrictions de f_n à C_n sont clairement des homéomorphismes car tous les objets intervenant sont Σ^1_1. Leurs graphes sont dans B car $C_n\subseteq E_n$. Enfin, la suite $(\text{Gr}(f_n\lceil C_n))_{n>0}$ converge vers $\Delta(Z)$ par construction des C_n. $\square$

Lemme 2.14 *Soit $(h_n)_{n>0}$ une suite de fonctions continues et ouvertes de domaine et d'image 2^ω telle que $\Delta(2^\omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n>0} Gr(h_n)}$ et $h_n(\alpha) \neq \alpha$ pour tout α d'un ouvert dense de 2^ω. Alors il existe un ouvert-fermé C_n de 2^ω tel que si $h'_n := h_n\lceil C_n$, on ait*

(a) $(2^\omega, 2^\omega, Id_{2^\omega}, (h'_n)_{n>0})$ est une situation générale (à ceci près que certains C_n peuvent être vides).

(b) Pour tout $n > 0$, on a $C_n \cap h'_n[C_n] = \emptyset$.

Démonstration. Soit (α_n) une suite dense de 2^ω. On va construire, en plus des C_n, une suite d'entiers strictement croissante $(m(n))_n$. On choisit x et y dans $\mathcal{B}(\alpha_n, 2^{-n-1}[$ tels que $y \neq x$ et $y = h_{m(n)}(x)$, où $m(n)$ est un entier strictement supérieur à $\max_{p<n} m(p)$. On choisit un voisinage ouvert-fermé $\tilde{C}_{m(n)}$ de x tel que

$$(\tilde{C}_{m(n)} \times h_{m(n)}[\tilde{C}_{m(n)}]) \cap \Delta(Z) = \emptyset,$$
$$\tilde{C}_{m(n)} \subseteq \mathcal{B}(\alpha_n, 2^{-n-1}[\ \cap \ h^{-1}_{m(n)}(\mathcal{B}(\alpha_n, 2^{-n-1}[).$$

On choisit un ouvert-fermé non vide $D_{m(n)}$ de $h_{m(n)}[\tilde{C}_{m(n)}]$, et puis enfin on pose

$$C_{m(n)} := \tilde{C}_{m(n)} \cap h^{-1}_{m(n)}(D_{m(n)}).$$

Il reste à poser $C_m := \emptyset$ si $m \notin \{m(n) \ / \ n \in \omega\}$. □

Notation. On pose, pour $n > 0$,

$$h_n : \begin{cases} 2^\omega & \to 2^\omega \\ \alpha & \mapsto \begin{cases} \omega & \to 2 \\ k & \mapsto \begin{cases} \alpha(k) \text{ si } k \not\equiv -1 \ (2^n), \\ \alpha(2^{n+1}q - 2^n - 1) \text{ si } k = 2^n q - 1. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Lemme 2.15 *Les fonctions h_n vérifient les conditions suivantes :*

- Ce sont des surjections continues et ouvertes.

- $\Delta(2^\omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n>0} Gr(h_n)}$.

- Pour tout $n > 0$, $h_n(\alpha) \neq \alpha$ sur un ouvert dense de 2^ω.

- $0 < p < n \ \Rightarrow \ \forall \alpha \in 2^\omega \ \ h_p(h_n(\alpha)) = h_p(\alpha)$.

Démonstration. Les deux premières conditions sont clairement réalisées car $(h_n)_{n>0}$ converge uniformément vers Id_{2^ω}. Si $s \in \omega^{<\omega}$ et $n > 0$, on peut trouver un entier q tel que $2^n q - 1 \geq |s|$ et $2^{n+1}q - 2^n - 1 \geq |s|$; par conséquent, on trouve α dans 2^ω tel que $h_n(s^\frown\alpha) \neq s^\frown\alpha$. D'où la troisième condition. Il reste à voir la quatrième :

Cas 1. $k \not\equiv -1 \ (2^p)$.

On a alors $h_p(h_n(\alpha))(k) = h_n(\alpha)(k) = \alpha(k)$, car $k \not\equiv -1 \ (2^n)$ sinon on trouve q tel que $k = 2^n q - 1 = 2^p(2^{n-p}q) - 1$. Par ailleurs, $h_p(\alpha)(k) = \alpha(k)$.

Cas 2. $k \equiv -1 \ (2^p)$.

On a alors $h_p(h_n(\alpha))(k) = h_n(\alpha)(2^{p+1}q - 2^p - 1) = \alpha(2^{p+1}q - 2^p - 1)$ car on a que $2^{p+1}q - 2^p - 1 \not\equiv -1 \ (2^n)$ sinon on trouve q' tel que $2^{p+1}q - 2^p - 1 = 2^n q' - 1$, ce qui entraîne que $2q - 1 = 2^{n-p}q'$. Par ailleurs, $h_p(\alpha)(k) = \alpha(2^{p+1}q - 2^p - 1)$. □

Théorème 2.16 *Il n'est pas possible d'avoir u et v injectives dans le théorème 2.9.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : il existe un test B_1 avec injectivité des fonctions de réduction. Avec $A = (2^\omega \times 2^\omega) \setminus \Delta(2^\omega)$, on voit que B_1 est $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Avec $A = B_1$, on voit que $B_1 \notin$ pot($\mathbf{\Pi}^0_1$). Avec $A = \bigcup_{n>0}$ Gr(f_n), on trouve des injections continues u et v de 2^ω dans Z_0 telles que $\overline{B_1} \cap (u \times v)^{-1}(\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)) = B_1$. Posons $B := (u \times v)[B_1]$, $H := u[2^\omega]$, $K := v[2^\omega]$. Alors $B \notin$ pot($\mathbf{\Pi}^0_1$), sinon B_1 le serait. Le lemme 2.13 peut donc s'appliquer et nous fournit, avec le théorème 2.12, une injection continue $\tilde{u} : Z_0 \to (Z, \tau)$ telle que

$$\overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \cap (\tilde{u} \times \tilde{u})^{-1} \left(\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n \lceil C_n) \right) = \bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n).$$

Autrement dit, il existe une injection continue $u' : Z_0 \to u[2^\omega] \cap v[2^\omega]$ telle que

$$\overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \cap (u' \times u')^{-1}(B) = \bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n).$$

Posons $Z' := u'[Z_0]$, puis

$$\mathcal{U} : \begin{cases} Z_0 \to 2^\omega \\ z \quad \mapsto u^{-1}(u'(z)) \end{cases}, \ \mathcal{V} : \begin{cases} Z_0 \to 2^\omega \\ z \quad \mapsto v^{-1}(u'(z)) \end{cases}.$$

Alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des injections continues telles que

$$\overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V})^{-1}(B_1) = \bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n).$$

En effet, si $(\alpha, \beta) \in \overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V})^{-1}(B_1) \setminus (\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n))$, $\alpha = \beta$. On en déduit, puisque $(u(\mathcal{U}(\alpha)), v(\mathcal{V}(\alpha))) \notin \bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)$, que $(\mathcal{U}(\alpha), \mathcal{V}(\beta)) \notin B_1$, ce qui est absurde.

On en déduit que si A est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), mais pas potentiellement fermé de $X \times Y$, on peut trouver des injections continues $U : Z_0 \to X$ et $V : Z_0 \to Y$ telles que

$$\overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \cap (U \times V)^{-1}(A) = \bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n).$$

Il suffit en effet de composer les injections continues qui seraient fournies par une version injective du théorème 2.9 avec $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Par le lemme 2.15, on peut appliquer le lemme 2.14 à $Z = 2^\omega$ et à $(h_n)_{n>0}$, ce qui fournit une situation générale $(2^\omega, 2^\omega, \text{Id}_{2^\omega}, (h'_n)_{n>0})$. On a, par application du théorème 2.3, que $\bigcup_{n>0} \text{Gr}(h'_n)$ n'est pas potentiellement fermé. On peut donc trouver des injections continues U et V de Z_0 dans 2^ω telles que $\overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \cap (U \times V)^{-1}(\bigcup_{n>0} \text{Gr}(h'_n)) = \bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)$. Montrons que ceci est impossible, ce qui constituera la contradiction cherchée.

On raisonne par l'absurde. On commence par remarquer que $U = V$, puisque si $z \in Z_0$, alors $(z, z) \in \overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n)} \setminus (\bigcup_{n>0} \text{Gr}(f_n))$, donc

$$(U(z), V(z)) \in \overline{\bigcup_{n>0} \text{Gr}(h'_n)} \setminus \left(\bigcup_{n>0} \text{Gr}(h'_n) \right) = \Delta(2^\omega).$$

Posons, pour $n > 0$ et $m > 0$,

$$A^n_m := \{\alpha \in D_{f_n} \ / \ U(\alpha) \in C'_m \text{ et } U(f_n(\alpha)) \in h'_m[C'_m]\}.$$

Alors $D_{f_n} \subseteq \bigcup_{m>0} A^n_m$, donc on peut trouver m tel que $A^1_m \neq \emptyset$. On a, pour $\alpha \in A^1_m$,

$$(U(\alpha), U(f_1(\alpha))) \in \mathrm{Gr}(h'_m),$$

donc $h'_m(U(\alpha)) = U(f_1(\alpha))$. Par conséquent, la restriction de h'_m à $U[A^1_m]$ est injective.

Soit α_0 dans A^1_m ayant une infinité de 1 (α_0 existe puisque A^1_m est ouvert de Z_0). Notons $(n_k)_{k\in\omega}$ la suite des entiers tels que $\alpha_0 \in D_{f_{n_k}}$. On peut trouver $p_k > 0$ tel que

$$U(f_{n_k}(\alpha_0)) = h'_{p_{n_k}}(U(\alpha_0)).$$

Alors pour k assez grand, on a $f_{n_k}(\alpha_0) \in A^1_m$. Il existe k_0 assez grand tel que $p_{n_{k_0}} > m$, sinon on trouve $r \leq m$ tel que $U(f_{n_k}(\alpha_0)) = h'_r(U(\alpha_0))$ pour une infinité de k. Comme $(f_{n_k}(\alpha_0))_{k\in\omega}$ converge vers α_0, on a alors que $U(\alpha_0) = h'_r(U(\alpha_0)) \in C_r \cap h'_r[C_r] = \emptyset$, ce qui est absurde. On a donc $h'_m(h'_{p_{n_{k_0}}}(U(\alpha_0))) = h'_m(U(\alpha_0))$. Comme $U(\alpha_0)$ et $h'_{p_{n_{k_0}}}(U(\alpha_0)) = U(f_{n_{k_0}}(\alpha_0))$ sont dans $U[A^1_m]$, on a par injectivité que $U(\alpha_0) = h'_{p_{n_{k_0}}}(U(\alpha_0)) \in C_{p_{n_{k_0}}} \cap h'_{p_{n_{k_0}}}[C_{p_{n_{k_0}}}] = \emptyset$, ce qui est absurde. $\square$

3 Un test pour les ensembles non potentiellement différence transfinie d'ouverts.

Dans le paragraphe 2, nous avons vu le rôle important joué par l'arbre $\{\emptyset\} \cup \omega$. Nous généralisons maintenant cette notion d'arbre.

Notations. Dans toute la suite, ξ désignera un ordinal dénombrable.

• On définit $\Psi_\xi : \omega^{<\omega} \to \{-1\} \cup (\xi + 1)$ par récurrence sur $|s|$, où $s \in \omega^{<\omega}$: $\Psi_\xi(\emptyset) = \xi$ et

$$\Psi_\xi(s^\frown n) = \begin{cases} \bullet -1 \text{ si } \Psi_\xi(s) \leq 0, \\ \bullet\ \theta \text{ si } \Psi_\xi(s) = \theta + 1, \\ \bullet \text{ un ordinal impair de } \Psi_\xi(s) \text{ tel que la suite } (\Psi_\xi(s^\frown n))_n \text{ soit cofinale} \\ \text{dans } \Psi_\xi(s) \text{ et strictement croissante si } \Psi_\xi(s) \text{ est limite non nul.} \end{cases}$$

On définit alors des arbres : $T_\xi := \{s \in \omega^{<\omega} \ / \ \Psi_\xi(s) \neq -1\}$ et $T'_\xi := \{s \in T_\xi \ / \ \Psi_\xi(s) \neq 0\}$. Ces arbres sont bien sûr bien fondés, et la hauteur de T_ξ (resp. T'_ξ) est $1 + \xi$ (resp. ξ).

• Soient $(A_s)_{s\in T_\xi}$, $(B_s)_{s\in T_\xi}$, Z et T des ensembles, avec $A_s \times B_s \subseteq Z \times T$ ou $A_s \times B_s \subseteq T \times Z$, et $f_s : A_s \to B_s$ des fonctions. On note $B_p := \bigcup_{s\in T_\xi,\ |s| \text{ paire}} G(f_s)$ et $B_i := \bigcup_{s\in T_\xi,\ |s| \text{ impaire}} G(f_s)$.

Définitions 2.17 *(1) On dit que* $(Z,T,(f_s)_{s\in T_\xi})$ *est une* $situation\ générale$ *si*

(a) Z *et* T *sont des espaces polonais parfaits de dimension 0.*

(b) Les f_s *sont des fonctions continues et ouvertes de domaine ouvert-fermé non vide de* Z *et d'image ouverte-fermée de* T*, ou de domaine ouvert-fermé non vide de* T *et d'image ouverte-fermée de* Z*.*

(c) La suite $(G(f_{s^\frown n}))_n$ *converge vers* $G(f_s)$ *si* $s\in T'_\xi$*.*

(d) $\overline{B_p}=B_p\cup_{\textit{disj.}}B_i$ *si* ξ *est pair, et* $\overline{B_i}=B_p\cup_{\textit{disj.}}B_i$ *si* ξ *est impair.*

(2) On dit que $(Z,(f_s)_{s\in T_\xi})$ *est une* $bonne\ situation$ *si*

(a) Z *est un fermé parfait non vide de* ω^ω*.*

(b) f_s *est un homéomorphisme de domaine et d'image ouverts-fermés non vides de* Z*, et les graphes des* f_s *sont deux à deux disjoints. De plus,* $\alpha\leq_{\textit{lex}}f_s(\alpha)$ *si* $\alpha\in A_s$*.*

(c) La suite $(\textit{Gr}(f_{s^\frown n}))_n$ *converge vers* $\textit{Gr}(f_s)$ *si* $s\in T'_\xi$*, et* $f_\emptyset=\textit{Id}_Z$*.*

(d) $\overline{B_p}=B_p\cup B_i$ *si* ξ *est pair, et* $\overline{B_i}=B_p\cup B_i$ *si* ξ *est impair. De plus,* $\bigcup_{s\in T_\xi,\ |s|<m}\textit{Gr}(f_s)$ *est fermé dans* $Z\times Z$ *pour tout entier* m*.*

Il est démontré le théorème suivant dans [Le2] (cf théorème 2.3) :

Théorème 2.18 *Soit* ξ *un ordinal dénombrable.*

(1) Si ξ *est pair non nul, soient* X *et* Y *des espaces polonais, et* A *un borélien pot(*$\mathbf{\Sigma}^0_3$*) et pot(*$\mathbf{\Pi}^0_3$*) de* $X\times Y$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le borélien A *n'est pas potentiellement* $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$*.*

(b) Il existe une situation générale $(Z,T,(g_s)_{s\in T_\xi})$ *et* $u:Z\to X$*,* $v:T\to Y$ *injectives continues telles que* $\overline{B_p}\cap(u\times v)^{-1}(A)=B_p$*.*

(2) Si ξ *est impair, soient* X *et* Y *des espaces polonais, et* A *un borélien pot(*$\mathbf{\Sigma}^0_3$*) et pot(*$\mathbf{\Pi}^0_3$*) de* $X\times Y$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le borélien A *n'est pas potentiellement* $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$*.*

(b) Il existe une situation générale $(Z,T,(g_s)_{s\in T_\xi})$ *et* $u:Z\to X$*,* $v:T\to Y$ *injectives continues telles que* $\overline{B_i}\cap(u\times v)^{-1}(A)=B_i$*.*

Notations. Soit $(\omega^\omega,(f_s)_{s\in T_\xi})$ une bonne situation. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\omega^{<\omega}$ comme en 2 :

$$s\ \mathcal{R}\ t\ \Leftrightarrow\ |s|=|t|\ \text{ et }\ (N_s\times N_t)\cap\left(\bigcup_{w\in T_\xi}\text{Gr}(f_w)\right)\neq\emptyset.$$

• Si $s\ \mathcal{R}\ t$, on pose

$$m(s,t):=\text{min}\{m\in\omega\ /\ \exists\ w\in T_\xi\ \ |w|=m\ \text{ et }\ (N_s\times N_t)\cap\text{Gr}(f_w)\neq\emptyset\}.$$

• On pose ensuite

$$A_s := \left\{\alpha \in \omega^\omega \ / \ \forall\, i_{\geq 1}^{\leq |s|} \ \ \alpha(N(s\lceil i)) = 1\right\}$$

$$B_s := \left\{\alpha \in \omega^\omega \ / \ \exists\, z \in \omega^{N(s)+1} \ \ \begin{cases} \forall\, i_{\geq 1}^{\leq |s|} \ \ z(N(s\lceil i)) = 1 \text{ et } \forall\, p \leq N(s) \\ \\ \alpha(p) = \begin{cases} N(z\lceil (p+1)) \text{ si } \exists\, i_{\geq 1}^{\leq |s|} \ \ p = N(s\lceil i), \\ \\ z(p) \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}\right\}$$

$$f_s \ : \begin{cases} A_s \ \rightarrow B_s \\ \\ \alpha \ \ \mapsto \begin{cases} \omega \ \ \rightarrow \omega \\ \\ p \ \ \mapsto \begin{cases} N(\alpha\lceil (p+1)) \text{ si } \exists\, i_{\geq 1}^{\leq |s|} \ \ p = N(s\lceil i), \\ \\ \alpha(p) \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

• Enfin, on pose

$$\mathcal{A}_n := \begin{cases} \{1\} \ \text{ si } \ n = 0 \ \text{ ou } \ n \notin \text{Im}(N), \\ \{1\} \cup \{N(s^\frown 1) \ / \ s \in \Pi_{i<n}\ \mathcal{A}_i \text{ et } \forall\, 0 < i < |N^{-1}(n)| \ \ s(N(N^{-1}(n)\lceil i)) = 1\} \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$Z_0 := \Pi_{n\in\omega}\ \mathcal{A}_n.$$

Alors on voit facilement par récurrence que $\mathcal{A}_n$ est fini et a au moins deux éléments si $n \in \text{Im}(N)\setminus\{0\}$, de sorte que Z_0, muni de la topologie induite par celle de ω^ω, est homéomorphe à 2^ω, comme compact métrisable parfait de dimension 0 non vide. Il est clair que si $\alpha \in Z_0$ et $\alpha \in A_s$, alors $f_s(\alpha) \in Z_0$, de sorte qu'on peut remplacer ω^ω par Z_0 dans la définition de f_s. On note encore f_s cette nouvelle fonction, le contexte précisant si on travaille dans ω^ω ou dans Z_0.

Théorème 2.19 *(1) Le couple* $(\omega^\omega, (f_s)_{s\in T_\xi})$ *est une bonne situation. De plus,*

(a) Les classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ *sont finies.*

(b) Si c *est une* $\mathcal{T}$*-chaîne telle que* $|c| \geq 3$, $c(0) = c(|c|-1)$, *et* $c(i) \neq c(i+1)$ *si* $i < |c|-1$, *alors il existe* $i < |c|-2$ *tel que* $c(i) = c(i+2)$.

(2) Le couple $(Z_0, (f_s)_{s\in T_\xi})$ *est une bonne situation.*

Démonstration. Les ensembles A_s et B_s sont des ouverts-fermés de ω^ω, clairement. On a que f_s est définie et bijective, et que $B_s \neq \emptyset$ si $A_s \neq \emptyset$. Mais $A_s \neq \emptyset$, clairement. Les propriétés topologiques de f_s sont claires. Si s et t sont deux suites distinctes de $\omega^{<\omega}$, il y a deux cas. Ou bien par exemple s débute t et $\text{Gr}(f_s) \cap \text{Gr}(f_t) = \emptyset$. Ou bien il existe $i < \min(|s|, |t|)$ minimal tel que $s(i) \neq t(i)$; dans ce cas, $f_s(\alpha)(N[s\lceil (i+1)])$ est différent de $\alpha(N[s\lceil (i+1)])$ alors que $f_t(\alpha)(N[s\lceil (i+1)])$ est égal à $\alpha(N[s\lceil (i+1)])$, par injectivité de N. D'où $\text{Gr}(f_s) \cap \text{Gr}(f_t) = \emptyset$ et la condition (b) d'une bonne situation, puisqu'on a bien sûr $\alpha \leq_{\text{lex}} f_s(\alpha)$ si $\alpha \in A_s$. Par ailleurs, la condition (a) d'une bonne situation est clairement vérifiée. Comme $f_s(\alpha) \in Z_0$ si $\alpha \in Z_0 \cap A_s$, ces conditions (a) et (b) valent également dans le cas (2).

• Soit $s \in T'_\xi$, $(\alpha, \beta) \in \omega^\omega \times \omega^\omega$ tels que $\forall\, n \in \omega \;\; (\alpha, \beta) \notin \text{Gr}(f_{s^\frown n})$, et $(\alpha, \beta) = \lim\limits_{k\to\infty} (\alpha_k, \beta_k)$, où $\beta_k = f_{s^\frown n_k}(\alpha_k)$. Alors on peut supposer que la suite d'entiers $(n_k)_k$ tend vers l'infini, pour voir que $\beta = f_s(\alpha)$. Comme $\alpha_k \in A_s$, $\alpha \in A_s$. Soit $p \in \omega$; alors on trouve un rang $k(p)$ tel que si $k \geq k(p)$, $f_{s^\frown n_k}(\alpha_k)(p) = f_s(\alpha_k)(p)$. Ce qui montre que $\beta(p) = f_s(\alpha)(p)$. D'où $\overline{\bigcup_{n\in\omega} \text{Gr}(f_{s^\frown n})} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} \text{Gr}(f_{s^\frown n})) \subseteq \text{Gr}(f_s)$.

Réciproquement, si $\beta = f_s(\alpha)$, $\forall\, n \in \omega \;\; (\alpha, \beta) \notin \text{Gr}(f_{s^\frown n})$ et $\alpha \in A_s$. Posons

$$\alpha_n := \alpha\lceil N(s^\frown n)^\frown 1^\omega.$$

On a $\alpha_n \in A_{s^\frown n}$, puisque le fait d'être dans A_s ne dépend que des $N(s) + 1$ premières coordonnées et que $N(s) < N(s^\frown n)$. On a alors, puisque $N(s^\frown n)$ tend vers l'infini avec n, que $f_{s^\frown n}(\alpha_n)$ tend vers β. En effet, pour n suffisamment grand, on a $f_{s^\frown n}(\alpha_n)(p) = f_s(\alpha_n)(p) = f_s(\alpha)(p)$. D'où $(\alpha, \beta) \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} \text{Gr}(f_{s^\frown n})}$, puisque (α_n) tend vers α. Ceci montre que la suite $(f_s)_{s\in T_\xi}$ vérifie la condition (c) d'une bonne situation (dans les cas (1) et (2)).

• Montrons que $\bigcup_{s\in T_\xi,\ |s|<m} \text{Gr}(f_s)$ est fermé dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ si m est entier. Soit donc (α, β) dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $(\alpha, \beta) = \lim\limits_{k\to\infty} (\alpha_k, \beta_k)$, où $\beta_k = f_{s_k}(\alpha_k)$, avec $|s_k| < m$. Alors on peut supposer que s_k est de la forme $s^\frown n_k^\frown u_k$, avec $(n_k)_k$ strictement croissante vers l'infini. On montre alors comme précédemment que $\beta = f_s(\alpha)$. D'où le résultat.

Montrons maintenant que $\bigcup_{s\in T_\xi} \text{Gr}(f_s)$ est fermé dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$. Soit donc (α, β) dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $(\alpha, \beta) = \lim\limits_{k\to\infty} (\alpha_k, \beta_k)$, où $\beta_k = f_{s_k}(\alpha_k)$. Par ce qui précède, on peut supposer que la suite $(|s_k|)_k$ croît strictement vers l'infini. Alors il existe un entier p tel que $\{s_k(p) \;/\; k \in \omega\}$ soit infini. En effet, si tel n'était pas le cas, $\{s \in T_\xi \;/\; \exists\, k \in \omega \;\; s \prec s_k\}$ serait un sous-arbre infini de T_ξ, à branchements finis, donc il aurait une branche infinie par le lemme de König. Mais ceci contredit la bonne fondation de T_ξ. On peut donc supposer qu'il existe une suite s telle que $|s| = p$, $s \prec s_k$ et $(s_k(p))_k$ tende vers l'infini. On en déduit comme avant que $\beta = f_s(\alpha)$. D'où le résultat. Bien sûr, ceci vaut également dans $Z_0 \times Z_0$.

• On a donc $\overline{B_p} \subseteq \bigcup_{s\in T_\xi} \text{Gr}(f_s) = B_p \cup B_i$. Il reste à voir que $B_i \subseteq \overline{B_p}$ pour avoir (d), dans le cas où ξ est pair. Soit donc $s \in T_\xi$ de longueur impaire. Comme $s \in T'_\xi$, on a la conclusion en utilisant la condition (c). On raisonne de manière analogue si ξ est impair. On a donc montré que les couples nous intéressant sont des bonnes situations.

Les conditions (a) et (b) de (1) se montrent comme en 2.7, à ceci près que $\mathcal{E}(s_0(0)) = \{s_0(0)\}$ vaut dans tous les cas, et que l'injectivité de N nous fournit $c(i_1 + 1) = c(i_2 - 1)$. □

Théorème 2.20 *Soit ξ un ordinal dénombrable pair et $(Z, T, (\tilde{f}_s)_{s\in T_\xi})$ une situation générale. Alors il existe $u : \omega^\omega \to Z$ et $v : \omega^\omega \to T$ continues telles que $\overline{B_p} \cap (u \times v)^{-1}(\tilde{B}_p) = B_p$.*

Démonstration. Elle est calquée sur celle du théorème 2.8. On construit des suites $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ et $(V_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts, ainsi que Φ à valeurs T_ξ vérifiant les conditions (i), (ii), et

$$(iii)\ \ s\,\mathcal{R}\,t\ \ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}|w(s,t)| \text{ a même parité que et vaut au plus } m(s,t)\\ V_t=\tilde{f}_{w(s,t)}[U_s] \text{ si } \tilde{A}_{w(s,t)}\subseteq Z\\ U_s=\tilde{f}_{w(s,t)}[V_t] \text{ si } \tilde{A}_{w(s,t)}\subseteq T\end{array}\right.$$

On montre que si (α,β) est dans B_p (resp. B_i), alors $(u(\alpha),v(\beta))$ est dans $\tilde{B}_p$ (resp. $\tilde{B}_i$). Soit donc $w\in T_\xi$ tel que $(\alpha,\beta)\in \mathrm{Gr}(f_w)$; alors $|w|$ est paire (resp. impaire), et on peut trouver un entier m_0 tel que l'on ait $(N_{\alpha\lceil m_0}\times N_{\beta\lceil m_0})\cap\bigcup_{s\in T_\xi,\ |s|<|w|}\mathrm{Gr}(f_s)=\emptyset$. Par (iii),

$$m(s,t)=m(\alpha\lceil m_0,\beta\lceil m_0)=|w|$$

et $|\Phi(s,t)|$ ont même parité. Comme $|w|$ est paire (resp. impaire), $|\Phi(s,t)|$ aussi. On a alors que $(u(\alpha),v(\beta))$ est dans $G(\tilde{f}_{\Phi(s,t)})\subseteq\tilde{B}_p$ (resp. $\tilde{B}_i$).

La suite de la preuve est identique à celle du théorème 2.8, le cas 2 non compris, à ceci près que le premier alinéa de la condition (3) devient

$$|w(k,l)| \text{ a même parité que et vaut au plus } m(z_{\phi^{-1}(k)},z_{\phi^{-1}(l)}).$$

Cas 2. $o=p+1$.

2.1. $z_{\phi^{-1}(m)}\,\mathcal{R}\,z_{\phi^{-1}(n)}$.

Soit $w\in T_\xi$ tel que $(N_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}}\times N_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}})\cap\mathrm{Gr}(f_w)\neq\emptyset$. On peut supposer que

$$|w|=m(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}).$$

Par (iii), $|w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})|$ et $|w|$ ont même parité et $|w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})|\leq|w|$. Il y a deux cas.

2.1.1. $\tilde{A}_{w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})}\subseteq Z$.

Par la condition (3), on a

$$V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}=\tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})}[U_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}}].$$

On en déduit que $(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}\times V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}})\cap G(\tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})})\neq\emptyset$. Comme on a

$$G(\tilde{f}_s)=\overline{\bigcup_{n\in\omega}G(\tilde{f}_{s\frown n})}\setminus\left(\bigcup_{n\in\omega}G(\tilde{f}_{s\frown n})\right)$$

si $s\in T'_\xi$, on peut trouver $t\in\omega^{<\omega}$ lexicographiquement minimale telle que

$$(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}\times V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}})\cap G(\tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})\frown t})\neq\emptyset,$$

et aussi telle que $|w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})\frown t|$ soit de même parité que et vaille au plus

$$m(z_{\phi^{-1}(m)},z_{\phi^{-1}(n)}).$$

On pose alors $\Phi(z_{\phi^{-1}(m)},z_{\phi^{-1}(n)}):=w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p},z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})\frown t$. Il y a alors 2 cas.

2.1.1.1. $\tilde{A}_{w(m,n)} \subseteq Z$.

2.1.1.1.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On a alors $U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \cap \tilde{f}_\emptyset^{-1}(\tilde{f}_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(m,n)}]) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.1.1.

2.1.1.1.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a alors $\tilde{f}_{w(m,n)}[U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(m,n)}] \cap \tilde{f}_\emptyset^{-1}(U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p}) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.1.2.

2.1.1.2. $\tilde{A}_{w(m,n)} \subseteq T$.

2.1.1.2.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On a alors $U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}} \cap \tilde{f}_\emptyset^{-1}(\tilde{f}^{-1}_{w(m,n)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.2.1.

2.1.1.2.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a alors $\tilde{f}^{-1}_{w(m,n)}(U^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap \tilde{f}_\emptyset^{-1}(U_{z_{\phi^{-1}(n)}}\lceil p) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.2.2.

2.1.2. $\tilde{A}_{w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})} \subseteq T$.

Par la condition (3), on a $U_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}} = \tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(n)\lceil p})}[V_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}]$. On conclut alors comme en 2.1.1.

2.2. $z_{\phi^{-1}(n)} \mathrel{\mathcal{R}} z_{\phi^{-1}(m)}$.

On raisonne comme en 2.1 : il y a deux cas.

2.2.1. $\tilde{A}_{w(z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(m)\lceil p})} \subseteq Z$.

Par la condition (3), on a $V_{z_{\phi^{-1}(m)\lceil p}} = \tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(m)\lceil p})}[U_{z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}}]$. On en déduit que $(U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \times V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap G(\tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(m)\lceil p})}) \neq \emptyset$. Comme

$$G(\tilde{f}_s) = \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(\tilde{f}_{s^\frown n})} \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} G(\tilde{f}_{s^\frown n})\right)$$

si $s \in T'_\xi$, on peut trouver $t' \in \omega^{<\omega}$ lexicographiquement minimale telle que

$$(U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \times V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \cap G(\tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(m)\lceil p})^\frown t'}) \neq \emptyset,$$

et aussi telle que $|w(z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(m)\lceil p})^\frown t'|$ soit de même parité que et vaille au plus

$$m(z_{\phi^{-1}(n)}, z_{\phi^{-1}(m)}).$$

On pose alors $\Phi(z_{\phi^{-1}(n)}, z_{\phi^{-1}(m)}) := w(z_{\phi^{-1}(n)\lceil p}, z_{\phi^{-1}(m)\lceil p})^\frown t'$. Il y a alors 2 cas.

2.2.1.1. $\tilde{A}_{w(n,m)} \subseteq Z$.

2.2.1.1.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On a alors $U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \cap \tilde{f}^{-1}_{w(n,m)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}}) \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.3.1.

2.2.1.1.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a alors $\tilde{f}^{-1}_\emptyset(\tilde{f}^{-1}_{w(n,m)}(V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}})) \cap V_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.3.2.

2.2.1.2. $\tilde{A}_{w(n,m)} \subseteq T$.

2.2.1.2.1. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq Z$.

On a alors $\tilde{f}_{w(n,m)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(n,m)}] \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.4.1.

2.2.1.2.2. $\tilde{A}_\emptyset \subseteq T$.

On a alors $\tilde{f}^{-1}_\emptyset(\tilde{f}_{w(n,m)}[V^{n-1}_{z_{\phi^{-1}(m)}} \cap \tilde{A}_{w(n,m)}]) \cap V_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} \neq \emptyset$, et on raisonne comme en 1.4.2.

2.2.2. $\tilde{A}_{w(z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p, z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p)} \subseteq T$.

Par la condition (3), on a $U_{z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p} = \tilde{f}_{w(z_{\phi^{-1}(n)}\lceil p, z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p)}[V_{z_{\phi^{-1}(m)}\lceil p}]$. On conclut alors comme en 2.2.1. $\square$

Théorème 2.21 *Soit ξ un ordinal dénombrable.*

(1) Si ξ est pair, il existe un borélien A_ξ de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) Le borélien A n'est pas pot($D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$).

(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \rightarrow X$ et $v : 2^\omega \rightarrow Y$ telles que $\overline{A_\xi} \cap (u \times v)^{-1}(A) = A_\xi$.

(2) Si ξ est impair, il existe un borélien A_ξ de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) Le borélien A n'est pas pot($\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$).

(b) Il existe des fonctions continues $u : 2^\omega \rightarrow X$ et $v : 2^\omega \rightarrow Y$ telles que $\overline{A_\xi} \cap (u \times v)^{-1}(A) = A_\xi$.

Démonstration. Soit $\Phi : 2^\omega \rightarrow Z_0$ un homéomorphisme. On montre le théorème dans le cas où ξ est pair, l'autre cas étant analogue. On pose

$$A_\xi := (\Phi \times \Phi)^{-1}(B_p).$$

• Si $\xi = 0$, $\overline{B_p} = B_p$. Si A est non vide, soit $(x, y) \in A$, et u (resp. v) l'application constante identique à x (resp. y). Alors u et v sont continues, et $\overline{A_0} = A_0 \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$. Réciproquement, $A_0 \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$, donc A est non vide et $A \notin D_0(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Dans la suite, on supposera donc $\xi \neq 0$.

• Appliquons le théorème 3.2 à $X = Y = 2^\omega$, $A = A_\xi$, $Z = T = Z_0$, et $u = v = \Phi^{-1}$. Ce théorème s'applique car

- A_ξ a ses coupes dénombrables, donc est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$).

- $(Z_0, (f_s)_{s \in T_\xi})$ est une bonne situation (par 3.3), donc $(Z_0, Z_0, (f_s)_{s \in T_\xi})$ est une situation générale.

- $B_p = (u \times v)^{-1}(A_\xi) = (u \times v)^{-1}(A_\xi) \cap \overline{B_p}$.

On a alors que A_ξ n'est pas pot($D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$), ce qui montre que (b) implique (a) (la parité de ξ fait que la classe $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ est stable par intersection avec les fermés).

• Réciproquement, si A n'est pas potentiellement $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, le théorème 3.2 nous fournit une situation générale $(Z, T, (\tilde{f}_s)_{s \in T_\xi})$ et des injections continues $\tilde{u} : Z \rightarrow X$ et $\tilde{v} : T \rightarrow Y$ telles que

$$\overline{\tilde{B}_p} \cap (\tilde{u} \times \tilde{v})^{-1}(A) = \tilde{B}_p.$$

Le théorème 3.4 nous fournit des fonctions continues $u' : \omega^\omega \rightarrow Z$ et $v' : \omega^\omega \rightarrow T$ telles que

$$\overline{B_p} \cap (u' \times v')^{-1}(\tilde{B}_p) = B_p.$$

Soit $\Psi : Z_0 \rightarrow \omega^\omega$ l'injection canonique. On pose

$$u := \tilde{u} \circ u' \circ \Psi \circ \Phi, \ v := \tilde{v} \circ v' \circ \Psi \circ \Phi.$$

Alors u et v sont clairement continues, et on a clairement $A_\xi \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$. Si $(\alpha, \beta) \in \overline{A_\xi} \setminus A_\xi$, $(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) \in \overline{B_p} \setminus B_p = B_i$, donc $(u' \circ \Psi \circ \Phi(\alpha), v' \circ \Psi \circ \Phi(\beta)) \in \tilde{B}_i \subseteq \overline{\tilde{B}_p}$, et $(u(\alpha), v(\beta))$ n'est pas dans A. $\square$

Remarques. (a) L'énoncé de ce théorème fournit un exemple de test A_ξ dans $2^\omega \times 2^\omega$; mais la preuve nous donne aussi un test dans $Z_0 \times Z_0$, et un autre dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$.

(b) Le théorème 3.5 fournit une caractérisation des ensembles non potentiellement $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ pour ξ pair, et non potentiellement $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ pour ξ impair. Mais un simple passage au complémentaire nous fournit une caractérisation des ensembles non potentiellement $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ pour ξ pair, et non potentiellement $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ pour ξ impair :

Théorème 2.22 *Soit ξ un ordinal dénombrable.*

(1) Si ξ est pair, il existe un borélien A_ξ de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) Le borélien A n'est pas pot($\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$).

(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ et $v : 2^\omega \to Y$ continues telles que $\overline{A_\xi} \cap (u \times v)^{-1}(A) = \overline{A_\xi} \setminus A_\xi$.

(2) Si ξ est impair, il existe un borélien A_ξ de $2^\omega \times 2^\omega$ tel que pour tous espaces polonais X et Y, et pour tout borélien A de $X \times Y$ qui est pot($\mathbf{\Sigma}^0_3$) et pot($\mathbf{\Pi}^0_3$), on a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) Le borélien A n'est pas pot($D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$).

(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ et $v : 2^\omega \to Y$ continues telles que $\overline{A_\xi} \cap (u \times v)^{-1}(A) = \overline{A_\xi} \setminus A_\xi$.

En fait, on a $\overline{A_\xi} \setminus A_\xi = (\Phi \times \Phi)^{-1}(B_i)$ si ξ est pair ; si ξ est impair, on a $A_\xi = (\Phi \times \Phi)^{-1}(B_i)$ et $\overline{A_\xi} \setminus A_\xi = (\Phi \times \Phi)^{-1}(B_p)$.

3 Références.

[Ku] K. Kuratowski, *Topology,* Vol. 1, Academic Press, 1966

[Le1] D. Lecomte, *Classes de Wadge potentielles et théorèmes d'uniformisation partielle,* Fund. Math. 143 (1993), 231-258

[Le2] D. Lecomte, *Uniformisations partielles et critères à la Hurewicz dans le plan,* Trans. A.M.S. 347, 11 (1995), 4433-4460

[Lo1] A. Louveau, *A separation theorem for Σ^1_1 sets,* Trans. A. M. S. 260 (1980), 363-378

[Lo2] A. Louveau, *Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets,* Cabal Sem. 79-81 (A. S. Kechris, D. A. Mauldin, Y. N. Moschovakis, eds), Lect. Notes in Math. 1019 Springer-Verlag (1983), 28-55

[Lo3] A. Louveau, *Livre à paraître*

[Lo-SR] A. Louveau and J. Saint Raymond, *Borel classes and closed games : Wadge-type and Hurewicz-type results,* Trans. A. M. S. 304 (1987), 431-467

[Mo] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory,* North-Holland, 1980

[SR] J. Saint Raymond, *La structure borélienne d'Effros est-elle standard ?,* Fund. Math. 100 (1978), 201-210