Dossier de recherche

Différents aspects de théorie descriptive des ensembles :
(1) Boréliens du plan
(2) Fonctions de première classe
(3) Omega-puissances

Dominique LECOMTE

Septembre 2005

• Université Paris 6, Equipe d'analyse fonctionnelle, tour 46-0, boîte 186,
4, place Jussieu, 75 252 Paris Cedex 05, France.
lecomte@moka.ccr.jussieu.fr
• Université de Picardie, I.U.T. de l'Oise, site de Creil,
13, allée de la faïencerie, 60 107 Creil, France.

Voici une synthèse de mes travaux de recherche depuis ma thèse de Doctorat [1]. Ces travaux constituent en partie la suite de l'étude des boréliens du plan entamée dans cette thèse de Doctorat. Entre deux, d'autres travaux, concernant d'une part les fonctions de première classe, et d'autre part les omega-puissances, ont été réalisés. L'ensemble de ces travaux se situent dans le cadre de la théorie descriptive des ensembles. Je renvoie le lecteur à [K] et [Ku] pour les notions de base et notations de théorie descriptive classique, et à [M] pour les notions de théorie descriptive effective.

[1] Dans ce document, nous allons résumer le contenu des articles [L4]-[L10], qui datent d'après ma thèse de Doctorat. Cependant, pour plus de clarté et de complétude, nous ferons également appel à des résultats inclus dans les articles [L1]-[L3], qui constituent cette thèse de Doctorat. La provenance des résultats cités apparaîtra clairement dans le texte.

RÉSUMÉ.

Boréliens du plan.

Ce travail fut entamé il y a quinze ans dans ma thèse de Doctorat. En théorie descriptive, une méthode courante pour montrer qu'un ensemble est compliqué est de montrer qu'il est plus compliqué qu'un ensemble de référence, dont on sait bien qu'il est compliqué. Ce travail se situe dans cet esprit. Le prototype des résultats de ce genre est le théorème d'Hurewicz :

Théorème 1 *Soient $P_f := \{\alpha \in 2^\omega / \exists n \in \omega \ \ \forall m \geq n \ \ \alpha(m) = 0\}$, X un espace polonais, et A un borélien de X. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est $\mathbf{\Pi}^0_2(X)$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ continue et injective telle que $P_f = u^{-1}(A)$.

Ce théorème a été généralisé aux autres classes de Baire par A. Louveau et J. Saint Raymond :

Théorème 2 *Soient $\xi < \omega_1$, $A_{1+\xi} \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(2^\omega)$, X un espace polonais, et A, B des analytiques disjoints de X. L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(X)$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ continue telle que $A_{1+\xi} \subseteq u^{-1}(A)$ et $2^\omega \setminus A_{1+\xi} \subseteq u^{-1}(B)$.

Théorème 3 *Soit $\xi < \omega_1$. Il existe des exemples explicites de $A_{1+\xi} \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(2^\omega) \setminus \mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(2^\omega)$.*

Ce travail vise à étudier la complexité des boréliens du plan, ou plus généralement d'un produit de deux espaces polonais. A. Louveau a donné un sens précis à cela :

Définition 4 *Soient X, Y des espaces polonais, A un borélien de $X \times Y$, et Γ une classe de Baire. On dit que A est $\underline{\text{potentiellement dans } \Gamma}$ (ce qu'on note $A \in$ pot(Γ)) s'il existe une topologie polonaise plus fine σ (resp. τ) sur X (resp. Y) telles que $A \in \Gamma([X, \sigma] \times [Y, \tau])$.*

La question principale figurant dans ma thèse de Doctorat avait été posée par A. Louveau : y a-t-il un théorème à la Hurewicz pour les boréliens du plan ? Il n'y avait qu'un début de réponse dans cette thèse. La réponse est maintenant nettement plus complète. Le résumé très rapide des apports nouveaux est le suivant. D'abord montrer que les notions naturelles de comparaison ne fonctionnent pas pour étudier ce problème. Puis en proposer une autre, qui elle fonctionne dans le cas général. La notion habituelle de comparaison des relations d'équivalence boréliennes est le quasi-ordre de réduction borélienne. Ceci signifie que si X (resp. Y) est un espace polonais, et E (resp. F) une relation d'équivalence borélienne sur X (resp. Y), alors

$$E \leq_B F \ \Leftrightarrow\ \exists u : X \to Y \text{ borélienne telle que } E = (u \times u)^{-1}(F).$$

Ceci peut se schématiser de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|c|c|c|l} \cline{2-2}\cline{4-4} X \times X & E & \dashrightarrow\!\!\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow & F & Y \times Y \\ \cline{2-2}\cline{4-4} & \neg E & \dashrightarrow\!\!\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow & \neg F & \\ \cline{2-2}\cline{4-4} \end{array}$$

Notons que ceci a un sens même si E et F ne sont pas des relations d'équivalence. La notion de classe de Baire potentielle est un invariant naturel pour $\leq_B$. Le théorème d'Harrington, Kechris et Louveau peut s'énoncer en termes de classes de Baire potentielles :

Théorème 5 *Soient* $E_0 := \{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\exists n\in\omega\ \ \forall m\geq n\ \ \alpha(m)=\beta(m)\}$*,* X *un espace polonais, et* E *une relation d'équivalence borélienne sur* X*. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) La relation E *est pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*).*
(b) $E_0\leq_B E$ *(avec* u *continue et injective).*

Nous cherchons à étendre ce résultat aux boréliens arbitraires du plan. On y arrive en partie. Pour ce faire, on introduit une notion de comparaison analogue à $\leq_B$, mais rectangulaire. Soient X, Y, X', Y' des espaces polonais, et A (resp. A') un borélien de $X\times Y$ (resp. $X'\times Y'$). On pose

$$A\leq^r_B A'\ \Leftrightarrow\ \exists u:X\rightarrow X'\ \ \exists v:Y\rightarrow Y'\ \text{ boréliennes telles que } A=(u\times v)^{-1}(A').$$

Le résultat suivant était dans ma thèse de Doctorat :

Théorème 6 *Soient* $\Delta(2^\omega):=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\alpha=\beta\}$*,* $L_0:=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\alpha<_{lex}\beta\}$*,* X,Y *des espaces polonais, et* A *un sous-ensemble pot(*$\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$*) de* $X\times Y$*. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A *est pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*).*
(b) $\neg\Delta(2^\omega)\leq^r_B A$ *ou* $L_0\leq^r_B A$ *(avec* u*,* v *continues et injectives).*

Les choses se compliquent au niveau dual $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ des différences de deux ouverts :

Théorème 7 *(a) Il existe une* $\leq^r_B$*-antichaîne parfaite* $(A_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}\subseteq D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)(2^\omega\times 2^\omega)$ *formée d'ensembles* $\leq^r_B$*-minimaux parmi les boréliens non pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*).*
(b) Il existe une $\leq_B$*-antichaîne parfaite* $(R_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}$ *formée d'ensembles* $\leq_B$*-minimaux parmi les boréliens non pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*). De plus,* $(R_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}$ *peut être une sous-classe de l'une des classes suivantes :*
- *Les graphes.*
- *Les graphes orientés.*
- *Les quasi-ordres.*
- *Les ordres partiels.*

On peut également montrer que le quasi-ordre $[D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)\setminus\text{pot}(\mathbf{\Pi}^0_1),\leq^r_B]$ n'est pas bien fondé. Il faut donc trouver une autre notion de comparaison. Les résultats les plus importants de cette partie, qui répondent à la question d'A. Louveau, sont les suivants. Pour les énoncer, il faut une définition :

Définition 8 *On dit qu'un* $\underline{arbre}$ T *sur* 2×2 *est* $\underline{uniform\acute{e}ment\ acyclique}$ *si, pour tout* $p>0$*,*
(a) La relation $T\cap(2^p\times 2^p)$ *est irréflexive et antisymétrique.*
(b) La relation symétrique $s(T\cap(2^p\times 2^p))$ *engendrée par* $T\cap(2^p\times 2^p)$ *est acyclique.*

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats annoncés, en deux parties comme avant :

Théorème 9 *Soient* T *un arbre uniformément acyclique,* $\xi<\omega_1$*,* $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)$*,* X*,* Y *des espaces polonais, et* A*,* B *des analytiques disjoints de* $X\times Y$*. L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A *est séparable de* B *par un ensemble pot(*$\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}$*).*
(b) Il existe $u:2^\omega\rightarrow X$*,* $v:2^\omega\rightarrow Y$ *continues telles que les inclusions* $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ *et* $\lceil T\rceil\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$ *soient satisfaites.*

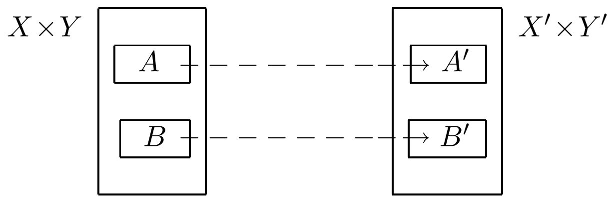
Ce résultat a été initialement montré par D. Lecomte quand $1+\xi$ est un ordinal successeur. G. Debs l'a ensuite montré quand $1+\xi$ est un ordinal limite. Il est à noter qu'on peut déduire le théorème 2 de la preuve du théorème 9. Le théorème 9 est l'analogue du théorème 2 en dimension deux.

Théorème 10 *Il existe des exemples explicites de :*
(a) Un arbre uniformément acyclique T.
(b) Un ensemble $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)\setminus$pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$, pour tout $\xi<\omega_1$.

Une conséquence des théorèmes 9 et 10 est la suivante :

Corollaire 11 *Soit $\xi<\omega_1$. Il existe un borélien $A_{1+\xi}$ de $2^\omega\times 2^\omega$ tel que, pour X,Y polonais, et pour A, B analytiques disjoints de $X\times Y$, exactement l'une des éventualités suivantes se produise :*
(a) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.
(b) Il existe $u:2^\omega\rightarrow X$, $v:2^\omega\rightarrow Y$ continues telles que les inclusions $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ et $\overline{A_{1+\xi}}\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$ soient satisfaites.
De plus, on ne peut pas remplacer $\overline{A_{1+\xi}}\setminus A_{1+\xi}$ par $(2^\omega\times 2^\omega)\setminus A_{1+\xi}$.

Une fois de plus, des cycles sont impliqués dans ce complément de non-remplacement, dû en grande partie à G. Debs. Le bon schéma de comparaison semble donc être le suivant :



L'examen des résultats précédents pose clairement la question de l'injectivité de u et v. On a la réponse suivante :

Théorème 12 *Il existe un borélien B_2 de $\omega^\omega\times\omega^\omega$ à coupes horizontales et verticales dénombrables, tel que pour X, Y polonais, et pour A borélien de $X\times Y$ à coupes horizontales et verticales dénombrables, exactement l'une des éventualités suivantes se produise :*
(a) Le borélien A est pot$(\mathbf{\Pi}^0_2)$.
(b) Il existe $u:\omega^\omega\rightarrow X$, $v:\omega^\omega\rightarrow Y$ continues et injectives telles que $B_2=(u\times v)^{-1}(A)\cap\overline{B_2}$.

Ce théorème devient faux si on suppose seulement que A est à coupes verticales dénombrables. On ne peut pas non plus avoir u et v injectives dans le corollaire 11 si $\xi=0$. On peut aussi montrer que l'injectivité de la fonction de comparaison est impossible dans la dichotomie de Kechris, Solecki et Todorčević sur les graphes analytiques. Le corollaire 11 peut aussi être utilisé pour montrer le théorème suivant, qui est un résultat complet pour les boréliens à coupes dénombrables :

Théorème 13 *Soit Γ une classe de Wadge non stable par passage au complémentaire. Alors il existe un borélien A_Γ de $\omega^\omega\times\omega^\omega$, et un fermé F_Γ contenant A_Γ, tels que pour X, Y polonais, et pour A borélien de $X\times Y$ à coupes dénombrables, exactement l'une des éventualités suivantes se produise :*
(a) Le borélien A est pot(Γ).
(b) Il existe $u:\omega^\omega\rightarrow X$, $v:\omega^\omega\rightarrow Y$ continues telles que $A_\Gamma=(u\times v)^{-1}(A)\cap F_\Gamma$.

Fonctions de première classe.

Le problème général est de retrouver toutes les valeurs d'une fonction, en ne connaissant ses valeurs que sur un petit ensemble, à l'aide d'un algorithme simple. Le cadre est celui des espaces métrisables séparables. Soient donc X, Y de tels espaces, et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Le petit ensemble est une suite dénombrable dense D de X (qui en général dépend de f). Les différents algorithmes en question consistent à déterminer, pour chaque point x de X, une sous-suite $(s_n[x, D])_n$ de D convergeant vers x. On dira que f est $\underline{\mathit{retrouvable\ relativement\ à\ D}}$ si, pour chaque x, la suite $(f(s_n[x, D]))_n$ converge vers $f(x)$. La fonction f est dite $\underline{\mathit{retrouvable}}$ s'il existe une suite D telle que f soit retrouvable relativement à D.

Les résultats sont sensibles à la façon dont on extrait la sous-suite $(s_n[x, D])_n$. L'algorithme original d'extraction est dû à U. B. Darji et M. J. Evans, et s'exprime à l'aide d'une distance compatible sur X. Leur résultat est le suivant :

Théorème 14 *(a) Si f est retrouvable, alors f est de première classe.*
(b) Réciproquement, si f est de première classe et X compact, alors f est retrouvable.

On peut montrer l'extension suivante de ce résultat :

Théorème 15 *Supposons que f est de première classe. Alors f est retrouvable dans les cas où :*
(a) X est réunion dénombrable de sous-espaces précompacts.
(b) X est un espace ultramétrique discret.

L'existence sur X d'une distance compatible le rendant précompact a la conséquence suivante :

Corollaire 16 *Soit X un espace métrisable séparable. Alors il existe une distance compatible d sur X telle que, pour toute $f : X \rightarrow Y$, les conditions suivantes soient équivalentes :*
(a) f est de première classe.
(b) f est retrouvable par rapport à d.

On peut trouver un exemple d'espace ultramétrique homéomorphe à l'espace de Baire dans lequel il existe un fermé dont la fonction caractéristique n'est pas retrouvable. Cette notion de retrouvabilité est donc métrique, et pas topologique, contrairement à la notion de fonction de première classe. Nous proposons un autre algorithme d'extraction de sous-suites, en des termes topologiques :

Définition 17 *Soit X un espace topologique. On dit qu'une base (W_m) de la topologie de X est une $\underline{\text{bonne base}}$ si pour tout ouvert U de X, et pour tout point x de U, il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, $W_m \subseteq U$ si $x \in W_m$.*

En utilisant le plongement dans le cube $[0, 1]^\omega$ de Hilbert, on peut voir que tout espace métrisable séparable admet une bonne base.

Définition 18 *Soit x dans X, et $D := (x_p)$ une suite dense de X. La suite $(s_n[x, D])_{n \in \omega}$ est :*

$$\left\{\begin{array}{ll} s_0[x, D] & := x_0, \\ & \\ s_{n+1}[x, D] := & \left\{\begin{array}{l} s_n[x, D] \ \text{ si } \ x = s_n[x, D], \\ x_{\min\{p \in \omega / \exists m \in \omega \ \{x, x_p\} \subseteq W_m \subseteq X \setminus \{s_0[x,D], \ldots, s_n[x,D]\}\}} \ \text{ sinon.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On a le résultat suivant, sans restriction sur X :

Théorème 19 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) f est de première classe.
(b) f est retrouvable au sens de la définition 18.

On se pose ensuite la question de l'uniformité de la suite D : peut-on prendre la même suite pour un ensemble $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X, Y)$? La réponse est très négative en général, puisqu'on peut montrer l'existence d'un compact métrisable de fonctions caractéristiques de $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ qui n'est pas uniformément retrouvable. On peut cependant montrer que A est uniformément retrouvable (au sens de la définition 18) si A est dénombrable. C'est aussi le cas s'il existe une topologie métrisable séparable plus fine sur X, faite de $\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$, rendant les fonctions de A continues. Ce fait a la conséquence suivante :

Théorème 20 *Soient E un espace de Banach, $X := [B_{E^*}, w^*]$, $Y := \mathbb{R}$ et $A := \{G|_X / G \in B_{E^{**}}\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) E^* est séparable.
(b) A est métrisable.
(c) Tout singleton de A est G_δ.
(d) A est uniformément retrouvable.

On obtient donc une caractérisation de la séparabilité du dual d'un espace de Banach arbitraire. On peut également obtenir la légère amélioration suivante de la caractérisation des fonctions de première classe de P. Y. Lee, W. K. Tang et D. Zhao :

Proposition 21 *Soient X, Y des espaces métriques, et*
(a) f est de première classe.
(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) \in \mathfrak{B}_1(X, \mathbb{R}^*_+)\quad d_X(x, x') < min(\delta(\epsilon)(x), \delta(\epsilon)(x')) \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Si Y est séparable, alors (a) implique (b). Si X est séparable et si tout fermé de X est un espace de Baire, alors (b) implique (a).

Ce résultat est établi dans le cadre d'une étude des analogues des théorèmes d'Ascoli pour les fonctions de première classe.

Omega-puissances.

Ce travail son origine dans l'informatique théorique. On considère $n = \{0, \ldots, n-1\} \geq 2$, et un dictionnaire sur cet alphabet, c'est-à-dire un sous-ensemble A de $n^{<\omega}$.

Définition 22 *L'$\underline{\omega-puissance}$ associée à A est l'ensemble A^∞ des phrases infinies constructibles avec A par concaténation. On a donc $A^\infty := \{a_0 a_1 \ldots \in n^\omega / \forall i \in \omega\ a_i \in A\}$.*

Les ω-puissances jouent un rôle crucial dans la caractérisation de Büchi des sous-ensembles de n^ω acceptés par les automates finis. Nous examinons les questions suivantes :

(a) Quels sont les niveaux de complexité topologique possibles pour les ω-puissances ? O. Finkel et A. Louveau ont montré indépendamment l'existence d'ω-puissances $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complètes. O. Finkel a montré l'existence d'ω-puissances $\mathbf{\Pi}^0_m$-complètes, pour tout entier $m \geq 1$.

(b) Quelle est la complexité topologique de l'ensemble des dictionnaires dont l'ω-puissance associée est d'un niveau de complexité donné ?

(c) Une ω-puissance est toujours analytique dans n^ω (et même compacte si le dictionnaire est fini). Quelle est la complexité topologique de l'ensemble des codes de $\mathbf{\Sigma}^1_1$ étant des ω-puissances ? Cette question a été posée par A. Louveau. Elle fait aussi sens pour l'ensemble des codes de $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\xi$) étant des ω-puissances.

L'analyticité des ω-puissances implique l'existence d'un rang co-analytique sur le complémentaire de A^∞. Nous allons en considérer un naturel, défini comme suit. Soit α dans n^ω. L'ensemble des suites finies de mots non vides de A dont la concaténation débute α est un arbre, qui est bien fondé si et seulement si $\alpha \notin A^\infty$. La hauteur de cet arbre est le rang annoncé. On considère la borne supérieure $R(A)$ de ce rang sur le complémentaire de A^∞. La connaissance de cet ordinal donne une borne supérieure de la complexité de A^∞. La réciproque est fausse : on peut trouver des dictionnaires dont l'omega-puissance associée est ouverte, et tel que $R(A)$ soit arbitrairement élevé. En montrant ceci, nous obtenons des co-analytiques vrais apportant des éléments de réponse à la question (b) :

Théorème 23 *Les ensembles suivants sont co-analytiques vrais :*
(a) $\Delta := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \Delta^1_1(A)\}$.
(b) $\Sigma_\xi := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi \cap \Delta^1_1(A)\}$, *pour* $1 \leq \xi < \omega_1$.
(c) $\Pi_\xi := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \mathbf{\Pi}^0_\xi \cap \Delta^1_1(A)\}$, *pour* $2 \leq \xi < \omega_1$.

Pour montrer ceci, on utilise un lemme analysant les ω-puissances boréliennes : A^∞ est borélienne si et seulement si on peut décomposer boréliennement toute phrase de A^∞ en mots de A. Cette analyse est aussi liée à un résultat d'uniformisation borélienne de G. Debs pour les G_δ à projections localement boréliennes. Un autre élément de réponse à la question (b) est le résultat suivant :

Théorème 24 $\mathbf{\Delta}_1 := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \mathbf{\Delta}^0_1\}$ *est* $K_\sigma \setminus \mathbf{\Pi}^0_2$.

Le théorème 23.(c) ne dit rien sur les ω-puissances fermées. Un cas particulier naturel est donné par les ω-puissances finiment engendrées. On pose donc $\mathcal{F} := \{A \subseteq n^{<\omega} / \exists B \subseteq n^{<\omega} \text{ fini } \ A^\infty = B^\infty\}$. $\mathcal{F}$ se décompose comme suit. Posons $\mathcal{G}_p := \{A \subseteq n^{<\omega} / \exists s_1, \ldots, s_p \in n^{<\omega} \ A^\infty = \{s_1, \ldots, s_p\}^\infty\}$, de sorte que $\mathcal{F} = \bigcup_p \mathcal{G}_p$. On a $\mathcal{G}_0 = \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty = \emptyset\}$, donc $\mathcal{G}_0$ est $\Pi^0_1 \setminus \mathbf{\Sigma}^0_1$. On peut montrer que $\mathcal{G}_1$ est $\mathbf{\Pi}^0_1$-complet. La complexité de $\mathcal{G}_2$ est sans doute le résultat le plus surprenant de cette étude. Son calcul utilise des lemmes sur les décompositions de phrases, finies ou non, en mots finis. En utilisant également la dérivation de Hausdorff, on obtient le résultat suivant :

Théorème 25 $\mathcal{G}_2$ *est* $\check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1) \setminus D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. *En particulier,* $\mathcal{G}_2$ *est* $\check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$*-complet.*

On obtient donc un exemple naturel se situant exactement au niveau ω de la hiérarchie de Wadge. Ceci est d'autant plus surprenant que cette complexité ne se lit pas à première vue sur la définition de $\mathcal{G}_2$. Pour ce qui est de la question (c), on peut montrer que l'ensemble des codes d'ouverts étant des ω-puissances est une vraie réunion d'un ouvert et d'un fermé. Pour la question (a), nous donnons des exemples pour les premiers niveaux de la hiérarchie de Wadge.

ABSTRACT.

Borel subsets of the plane.

This work started fifteen years ago, when I was preparing my thesis. In descriptive set theory, a standard way to see that a set is complicated is to notice that it is more complicated than a well-known example. We work in this spirit. A classical result in this direction is Hurewicz's theorem:

Theorem 1 *Let $P_f := \{\alpha\in 2^\omega/\exists n\in\omega\ \ \forall m\geq n\ \ \alpha(m)=0\}$, X be a Polish space, and A a Borel subset of X. Exactly one of the following holds:*
(a) The set A is $\mathbf{\Pi}^0_2(X)$.
(b) There exists $u\!:\!2^\omega\rightarrow X$ continuous and one-to-one with $P_f=u^{-1}(A)$.

This result has been generalized to the other Baire classes by A. Louveau and J. Saint Raymond:

Theorem 2 *Let $\xi<\omega_1$, $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(2^\omega)$, X be a Polish space, and A, B disjoint analytic subsets of X. One of the following holds:*
(a) The set A is separable from B by a $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(X)$ set.
(b) There exists $u\!:\!2^\omega\rightarrow X$ continuous with $A_{1+\xi}\subseteq u^{-1}(A)$ and $2^\omega\setminus A_{1+\xi}\subseteq u^{-1}(B)$.

Theorem 3 *Let $\xi<\omega_1$. There are concrete examples of $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(2^\omega)\setminus\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(2^\omega)$.*

We study the complexity of the Borel subsets of the plane, or more generally of a product of two Polish spaces. A. Louveau gave a specific meaning to this:

Definition 4 *Let X, Y be Polish spaces, A a Borel subset of $X\times Y$, and Γ a Baire class. We say that A is $\underline{potentially\ in\ \Gamma}$ (denoted $A\in pot(\Gamma)$) if there is a finer Polish topology σ (resp., τ) on X (resp., Y) such that $A\in\Gamma([X,\sigma]\times[Y,\tau])$.*

The main question in my thesis was asked by A. Louveau: is there a Hurewicz-like theorem for the Borel subsets of the plane? The content of my thesis only started to answer this question. The answer is now much more complete. In a few words, some of the new things are the following. First, we show that the natural notions of comparison do not work to study this problem. Then we give a new one, which works in the general case. The usual notion of comparison for Borel equivalence relations is the Borel reducibility quasi-order. This means that if X (resp., Y) is a Polish space, and E (resp., F) a Borel equivalence relation on X (resp., Y), then

$$E\leq_B F\ \Leftrightarrow\ \exists u\!:\!X\rightarrow Y\text{ Borel with }E=(u\times u)^{-1}(F).$$

The picture is the following:

$$X\times X\quad \begin{array}{|c|}\hline E\\ \hline \neg E\\ \hline\end{array}\begin{array}{c}\dashrightarrow\\ \dashrightarrow\end{array}\begin{array}{|c|}\hline F\\ \hline \neg F\\ \hline\end{array}\quad Y\times Y$$

Note that this makes sense even if E and F are not equivalence relations. The notion of potential Baire class is a natural invariant for $\leq_B$.

Harrington, Kechris and Louveau's theorem can be stated in terms of potential Baire classes:

Theorem 5 *Let* $E_0:=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\exists n\in\omega\ \ \forall m\geq n\ \ \alpha(m)=\beta(m)\}$*,* X *be a Polish space, and* E *a Borel equivalence relation on* X*. Exactly one of the following holds:*
(a) The relation E *is pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*).*
(b) $E_0\leq_B E$ *(with* u *continuous and one-to-one).*

We try to extend this result to arbitrary Borel subsets of the plane. This is partly possible. To do this, we introduce a notion of comparison analogous to $\leq_B$, but rectangular. Let X, Y, X', Y' be Polish spaces, and A (resp., A') a Borel subset of $X\times Y$ (resp., $X'\times Y'$). We let

$$A\leq^r_B A'\ \Leftrightarrow\ \exists u\!:\!X\rightarrow X'\ \ \exists v\!:\!Y\rightarrow Y'\ \text{Borel with}\ A=(u\times v)^{-1}(A').$$

The following result was shown in my thesis:

Theorem 6 *Let* $\Delta(2^\omega):=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\alpha=\beta\}$*,* $L_0:=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\alpha<_{lex}\beta\}$*,* X,Y *be Polish spaces, and* A *a pot(*$\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$*) subset of* $X\times Y$*. Exactly one of the following holds:*
(a) The set A *is pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*).*
(b) $\neg\Delta(2^\omega)\leq^r_B A$ *or* $L_0\leq^r_B A$ *(with* u*,* v *continuous and one-to-one).*

Things become more complicated at the level $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ of the differences of two open sets:

Theorem 7 *(a) There exists a perfect* $\leq^r_B$*-antichain* $(A_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}\subseteq D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)(2^\omega\times 2^\omega)$*, made of sets* $\leq^r_B$*-minimal among non pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*) sets.*
(b) There exists a perfect $\leq_B$*-antichain* $(R_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}$*, made of sets* $\leq_B$*-minimal among non pot(*$\mathbf{\Pi}^0_1$*) sets. Moreover,* $(R_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}$ *can be a subclass of one of the following classes:*
- *The graphs.*
- *The oriented graphs.*
- *The quasi-orders.*
- *The partial orders.*

One can also show that the quasi-order $[D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)\setminus\text{pot}(\mathbf{\Pi}^0_1),\leq^r_B]$ is not well founded. So we have to find another notion of comparison. The most important results in this section, which answer to A. Louveau's question, are the following. To state them, we need a definition:

Definition 8 *We say that a* $\underline{tree}$ T *on* 2×2 *is* $\underline{uniformly\ acyclic}$ *if, for each* $p>0$*,*
(a) The relation $T\cap(2^p\times 2^p)$ *is irreflexive and antisymmetric.*
(b) The symmetric relation $s(T\cap(2^p\times 2^p))$ *generated by* $T\cap(2^p\times 2^p)$ *is acyclic.*

Now we are ready to state the announced results, in two parts, as in dimension one:

Theorem 9 *Let* T *be a uniformly acyclic tree,* $\xi<\omega_1$*,* $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)$*,* X*,* Y *Polish spaces, and* A*,* B *disjoint analytic subsets of* $X\times Y$*. One of the following holds:*
(a) The set A *is separable from* B *by a pot(*$\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}$*) set.*
(b) There are $u:2^\omega\rightarrow X$*,* $v:2^\omega\rightarrow Y$ *continuous satisfying the inclusions* $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ *and* $\lceil T\rceil\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$*.*

This result has initially been shown by D. Lecomte when $1+\xi$ is a successor ordinal. Then G. Debs showed it when $1+\xi$ is a limit ordinal. We can deduce Theorem 2 from the proof of Theorem 9. Theorem 9 is the analogous version of Theorem 2 in dimension two.

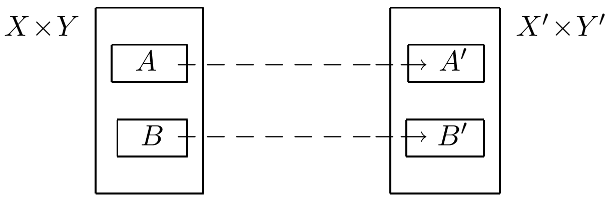
Theorem 10 *There are concrete examples of:*
(a) A uniformly acyclic tree T.
(b) A set $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)\setminus pot(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$, for each $\xi<\omega_1$.

A consequence of Theorems 9 and 10 is the following:

Corollary 11 *Let $\xi<\omega_1$. There exists a Borel subset $A_{1+\xi}$ of $2^\omega\times 2^\omega$ such that, for X, Y Polish, and for A, B disjoint analytic subsets of $X\times Y$, exactly one of the following holds:*
(a) The set A is separable from B by a pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$ set.
(b) There are $u:2^\omega\to X$, $v:2^\omega\to Y$ continuous satisfying the inclusions $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ and $\overline{A_{1+\xi}}\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$.

Moreover, we cannot replace $\overline{A_{1+\xi}}\setminus A_{1+\xi}$ with $(2^\omega\times 2^\omega)\setminus A_{1+\xi}$.

Here again, some cycles are involved in this non-replacement complement, essentially due to G. Debs. The good picture seems to be the following:



If we look at the previous results, it is natural to ask the question of the injectivity of u and v. We have the following answer:

Theorem 12 *There is a Borel subset B_2 of $\omega^\omega\times\omega^\omega$ with countable horizontal and vertical sections, such that for X, Y Polish, and for A Borel subset of $X\times Y$ with countable horizontal and vertical sections, exactly one of the following holds:*
(a) The set A is pot$(\mathbf{\Pi}^0_2)$.
(b) There are $u:\omega^\omega\to X$, $v:\omega^\omega\to Y$ continuous and one-to-one such that $B_2=(u\times v)^{-1}(A)\cap\overline{B_2}$.

This theorem becomes false if we only assume that A has countable vertical sections. One can also show that we cannot have u and v one-to-one in Corollary 11 if $\xi=0$. One can also show that the injectivity of the comparison function is impossible in the Kechris, Solecki and Todorčević dichotomy about analytic graphs. Corollary 11 can also be used to show the following theorem, which is a complete result for Borel sets with countable sections:

Theorem 13 *Let Γ be a Wadge class, not stable under taking complements. Then there is a Borel subset A_Γ of $\omega^\omega\times\omega^\omega$, and a closed set F_Γ containing A_Γ, such that for X, Y Polish, and for A Borel subset of $X\times Y$ with countable sections, exactly one of the following holds:*
(a) The set A is pot(Γ).
(b) There are $u:\omega^\omega\to X$, $v:\omega^\omega\to Y$ continuous with $A_\Gamma=(u\times v)^{-1}(A)\cap F_\Gamma$.

Baire class one functions.

The general problem is to recover all the values of a function, only knowing its values on a small set, with a simple algorithm. We work in separable metrizable spaces. So let X, Y be such spaces, and $f\!:\!X\!\rightarrow\!Y$ a function. The small set is a countable dense sequence D in X (which in general depends on f). The different algorithms determine, for each point x of X, a subsequence $(s_n[x,D])_n$ of D converging to x. We will say that f is $\underline{recoverable\ with\ respect\ to\ D}$ if, for each x, the sequence $\big(f(s_n[x,D])\big)_n$ converges to $f(x)$. The function f is said to be $\underline{recoverable}$ if there is a sequence D such that f is recoverable with respect to D.

Results depend on the way of extracting the subsequence $(s_n[x,D])_n$. The original algorithm is due to U. B. Darji and M. J. Evans, and uses a compatible metric on X. Their result is the following:

Theorem 14 *(a) If f is recoverable, then f is Baire class one.*
(b) Conversely, if f is Baire class one and X compact, then f is recoverable.

One can show the following extension:

Theorem 15 *Assume that f is Baire class one. Then f is recoverable in the following cases:*
(a) X is the countable union of totally bounded subspaces.
(b) X is a discrete ultrametric space.

The existence on X of a compatible metric making it totally bounded has the following consequence:

Corollary 16 *Let X be a separable metrizable space. Then there is a compatible metric d on X such that, for each $f\!:\!X\!\rightarrow\!Y$, the following are equivalent:*
(a) f is Baire class one.
(b) f is recoverable with respect to d.

There is an example of a ultrametric space, homeomorphic to the Baire space, in which there is a closed subset whose characteristic function is not recoverable. So this notion of recoverability is a metric one, and not a topological one. But the notion of a Baire class one function is topological. We give another algorithm, in topological terms:

Definition 17 *Let X be a topological space. A basis (W_m) for the topology of X is said to be a $\underline{good\ basis}$ if for each open subset U of X, and for each point x of U, there is an integer m_0 such that, for each $m\geq m_0$, $W_m\!\subseteq\!U$ if $x\!\in\!W_m$.*

Using the embedding into Hilbert's cube $[0,1]^\omega$, one can see that every separable metrizable space has a good basis.

Definition 18 *Let x be in X, and $D\!:=\!(x_p)$ a dense sequence in X. The sequence $\big(s_n[x,D]\big)_{n\in\omega}$ is defined as follows:*

$$\left\{\begin{array}{ll} s_0[x,D] & := x_0, \\ & \\ s_{n+1}[x,D] := & \left\{\begin{array}{l} s_n[x,D]\ \text{ if }\ x\!=\!s_n[x,D], \\ x_{\min\{p\in\omega/\exists m\in\omega\ \{x,x_p\}\subseteq W_m\subseteq X\setminus\{s_0[x,D],\ldots,s_n[x,D]\}\}}\ \text{ otherwise.}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

One has the following result, without any restriction on X :

Theorem 19 *The following are equivalent:*
(a) f is Baire class one.
(b) f is recoverable in the sense of Definition 18.

Then we ask the question of the uniformity of the sequence D: can we take the same sequence for a set $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X, Y)$? The answer is very negative in general, since one can show the existence of a metrizable compact set, made of characteristic functions of $D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ sets, which is not uniformly recoverable. However, one can show that A is uniformly recoverable (in the sense of Definition 18) if A is countable. It is also the case if there is a finer separable metrizable topology on X, made of $\boldsymbol{\Sigma}^0_2(X)$, making the functions of A continuous. This fact has the following consequence:

Theorem 20 *Let E be a Banach space, $X := [B_{E^*}, w^*]$, $Y := \mathbb{R}$ and $A := \{G|_X / G \in B_{E^{**}}\}$. The following are equivalent:*
(a) E^* is separable.
(b) A is metrizable.
(c) Every singleton of A is G_δ.
(d) A is uniformly recoverable.

So we get a characterization of the separability of the dual space of an arbitrary Banach space. One can also get the following slight improvement of P. Y. Lee, W. K. Tang and D. Zhao's characterization of Baire class one functions:

Proposition 21 *Let X, Y be metric spaces, and*
(a) f is Baire class one.
(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) \in \mathfrak{B}_1(X, \mathbb{R}^*_+)\quad d_X(x, x') < min(\delta(\epsilon)(x), \delta(\epsilon)(x'))\ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.
If Y is separable, then (a) implies (b). If X is separable and every closed subset of X is a Baire space, then (b) implies (a).

This result is shown inside a study of the existence of analogous versions of Ascoli's theorems for Baire class one functions.

Omega-powers.

This work comes from theoretical computer science. We consider $n = \{0, \ldots, n-1\} \geq 2$, and a dictionary over this alphabet, i.e., a subset A of $n^{<\omega}$.

Definition 22 *The $\underline{\omega - power}$ associated with A is the set A^∞ of infinite sentences constructible with A by concatenation. So we have $A^\infty := \{a_0 a_1 \ldots \in n^\omega / \forall i \in \omega\ a_i \in A\}$.*

The ω-powers play a crucial role in Büchi's characterization of the subsets of n^ω accepted by finite automata. We study the following questions:

(a) What are the possible levels of topological complexity for the ω-powers ? O. Finkel and A. Louveau proved independantly the existence of $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-complete ω-powers. O. Finkel showed the existence of $\boldsymbol{\Pi}^0_m$-complete ω-powers, for each integer $m \geq 1$.

(b) What is the topological complexity of the set of dictionaries whose associated ω-power has a given level of complexity?

(c) An ω-power is always an analytic subset of n^ω (it is even compact if the dictionary is finite). What is the topological complexity of the set of codes for $\mathbf{\Sigma}^1_1$ which are ω-powers? This question was asked by A. Louveau. It also makes sense for the set of codes for $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ (resp., $\mathbf{\Pi}^0_\xi$) sets which are ω-powers.

The fact that the ω-powers are analytic implies the existence of a co-analytic rank on the complement of A^∞. We consider a natural one, defined as follows. Let α in n^ω. The set of finite sequences of nonempty words of A, whose concatenation begins α, is a tree, which is well founded if and only if $\alpha \notin A^\infty$. The height of this tree is the announced rank. We consider the upper bound $R(A)$ of this rank on the complement of A^∞. Its knowledge gives an upper bound for the complexity of A^∞. The converse is false: there are dictionaries whose associated omega-power is open, and such that $R(A)$ is arbitrarily high. Showing this, we get true co-analytic sets giving some answers to Question (b):

Theorem 23 *The following sets are true co-analytic sets:*
(a) $\Delta := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \Delta^1_1(A)\}$.
(b) $\Sigma_\xi := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi \cap \Delta^1_1(A)\}$, *for* $1 \leq \xi < \omega_1$.
(c) $\Pi_\xi := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \mathbf{\Pi}^0_\xi \cap \Delta^1_1(A)\}$, *for* $2 \leq \xi < \omega_1$.

To show this, we use a lemma characterizing Borel ω-powers: A^∞ is Borel if and only if we can decompose in a Borel way each sentence in A^∞ into words of A. This analysis is also linked with a Borel selection result of G. Debs for G_δ sets locally with Borel projections. Another answer to Question (b) is the following result:

Theorem 24 $\mathbf{\Delta}_1 := \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty \in \mathbf{\Delta}^0_1\}$ *is* $K_\sigma \setminus \mathbf{\Pi}^0_2$.

Theorem 23.(c) does not say anything about closed ω-powers. A natural instance is given by finitely generated ω-powers. So we set $\mathcal{F} := \{A \subseteq n^{<\omega} / \exists B \subseteq n^{<\omega} \text{ finite } A^\infty = B^\infty\}$. $\mathcal{F}$ can be decomposed as follows. Set $\mathcal{G}_p := \{A \subseteq n^{<\omega} / \exists s_1, \ldots, s_p \in n^{<\omega}\ A^\infty = \{s_1, \ldots, s_p\}^\infty\}$, so that $\mathcal{F} = \bigcup_p \mathcal{G}_p$. One has $\mathcal{G}_0 = \{A \subseteq n^{<\omega} / A^\infty = \emptyset\}$, so $\mathcal{G}_0$ is $\Pi^0_1 \setminus \mathbf{\Sigma}^0_1$. One can show that $\mathcal{G}_1$ is $\mathbf{\Pi}^0_1$-complete. The complexity of $\mathcal{G}_2$ is probably the most surprising result in this study. Its computation uses some lemmas about decompositions of sentences, finite or not, into finite words. Using also the Hausdorff derivation, we get the following result:

Theorem 25 $\mathcal{G}_2$ *is* $\check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1) \setminus D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. *In particular,* $\mathcal{G}_2$ *is* $\check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$*-complete.*

So we get a natural example of a set exactly at the level ω of the Wadge hierarchy. This is really a surprise since this complexity is not clear at all on the definition of $\mathcal{G}_2$. For Question (c), one can show that the set of codes for open sets which are ω-powers is a true union of a closed set and of an open set. For Question (a), we give examples for the first levels of the Wadge hierarchy.

1 Boréliens du plan.

Ce thème s'inscrit dans le cadre de l'étude des relations binaires analytiques, largement considérée en théorie descriptive et au delà durant les trente dernières années (voir par exemple les travaux de G. Hjorth, A. Kechris, A. Louveau, B. Weiss, ...). Une préoccupation centrale est la classification des relations d'équivalence boréliennes ; plus récemment, la classification des ordres partiels (c'est-à-dire des relations réflexives, antisymétriques et transitives), et des quasi-ordres (c'est-à-dire des relations réflexives et transitives) boréliens a été considérée. A. Louveau a notamment montré que l'étude des quasi-ordres boréliens se ramène essentiellement à l'étude des boréliens arbitraires du plan. Nous allons décrire ces boréliens, en essayant de faire ressortir les idées-clef des principaux résultats, énoncés de manière non nécessairement chronologique. Nous tenterons néanmoins de mettre en évidence les moments importants de l'évolution des idées. Nous signalerons également au passage des questions restant ouvertes, afin de mettre en perspective la poursuite des recherches.

1.1 Préliminaires en dimension un.

Nous commençons par des rappels en dimension un avant de passer à l'étude des boréliens du plan à proprement parler. Rappelons que la hiérarchie de Baire des boréliens, dans les espaces topologiques métrisables, est construite en alternant les opérations de réunion dénombrable et de passage au complémentaire, en partant des ouverts (ou des ouverts-fermés, notés $\mathbf{\Delta}^0_1$, en dimension 0), ce de manière transfinie. On a alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{\Sigma}^0_1 = \text{ouverts} & \mathbf{\Sigma}^0_2 = F_\sigma & \ldots & \mathbf{\Sigma}^0_\omega & \ldots \\ \mathbf{\Pi}^0_1 = \text{fermés} & \mathbf{\Pi}^0_2 = G_\delta & \ldots & \mathbf{\Pi}^0_\omega & \ldots \end{array}$$

En théorie descriptive, une méthode classique pour voir qu'un ensemble est compliqué est de noter qu'il est plus compliqué qu'un exemple typique, dont on sait bien qu'il est compliqué. Dans cet ordre d'idées, nous avons notamment les résultats de type Hurewicz, et ceux de type Wadge.

Résultats de type Hurewicz.

Le résultat suivant est montré dans [SR] :

Théorème 1.1.1 *(Hurewicz) Soient $P_f := \{\alpha \in 2^\omega / \exists n \in \omega \ \ \forall m \geq n \ \ \alpha(m) = 0\}$, X un espace polonais, et A un borélien de X. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est $\mathbf{\Pi}^0_2(X)$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ continue et injective telle que $P_f = u^{-1}(A)$.

Cet exemple typique des suites nulles à partir d'un certain rang peut être remplacé par n'importe quel ensemble infini dénombrable sans point isolé. Il est appelé “test d'Hurewicz” pour la classe des G_δ. Nous voyons que la comparaison des boréliens se fait ici en utilisant des fonctions continues et injectives (nous dirons que P_f se réduit à A par u). Le choix de la notion de comparaison est l'un des aspects fondamentaux de ce travail. Le théorème d'Hurewicz a été généralisé aux autres classes de Baire par A. Louveau et J. Saint Raymond (voir [Lo-SR1]). Nous énonçons cette généralisation en deux parties, en oubliant l'injectivité (sur laquelle nous reviendrons plus tard) :

Théorème 1.1.2 *(Louveau-Saint Raymond) Soient* $\xi < \omega_1$, $A_{1+\xi} \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(2^\omega)$, *$X$ un espace polonais, et A, B des analytiques disjoints de X. L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(X)$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ continue telle que $A_{1+\xi} \subseteq u^{-1}(A)$ et $2^\omega \setminus A_{1+\xi} \subseteq u^{-1}(B)$.

Théorème 1.1.3 *Soit $\xi < \omega_1$. Il existe des exemples explicites de* $A_{1+\xi} \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(2^\omega) \setminus \mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(2^\omega)$.

Les raisons de l'énoncé en deux parties sont les suivantes :
- Le théorème 1.1.2 vaut pour tout $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}$ de 2^ω, alors que le théorème 1.1.1 est énoncé sous la forme "il existe un exemple typique tel que . . . ".
- On a une forme plus générale avec deux analytiques qu'avec un borélien et son complémentaire.
- Cette forme en deux parties se retrouvera en dimension deux.

Signalons qu'une version avec injectivité de cette généralisation existe (voir [Lo-SR1]) :

Théorème 1.1.4 *(Louveau-Saint Raymond) Soit $\xi < \omega_1$. Il existe un espace polonais $X_{1+\xi}$, et un ensemble $A_{1+\xi} \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi} \setminus \mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(X_{1+\xi})$, tels que pour tout espace polonais X, et pour tout borélien A de X, exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(X)$.
(b) Il existe $u : X_{1+\xi} \to X$ continue et injective telle que $A_{1+\xi} = u^{-1}(A)$.

En fait, on peut prendre $X_{1+\xi} = 2^\omega$, sauf si $\xi = 0$. Typiquement, X_1 peut être le compact dénombrable $\{0^k 10^\infty / k \in \omega\} \cup \{0^\infty\}$ (une suite convergente et sa limite), et $A_1 := \{0^k 10^\infty / k \in \omega\}$ (on enlève le point limite).

Classes et résultats de type Wadge.

Toujours dans cet ordre d'idées, et en oubliant encore l'injectivité, nous avons le résultat suivant (voir [W]) :

Théorème 1.1.5 *(Wadge) Soient X, Y des espaces polonais de dimension 0, et A (resp. B) un borélien de X (resp. Y). L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) Il existe $u : Y \to X$ continue telle que $B = u^{-1}(A)$.
(b) Il existe $v : X \to Y$ continue telle que $A = v^{-1}(\neg B)$.

Corollaire 1.1.6 *Soient $\xi < \omega_1$, $A_{1+\xi} \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi} \setminus \mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(2^\omega)$. Alors pour tout espace polonais X de dimension 0, et pour tout borélien A de X, exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(X)$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$ continue telle que $A_{1+\xi} = u^{-1}(A)$.
De plus, exactement l'une des éventualités suivantes se produit :
(a) L'ensemble A n'est pas $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(X)$.
(b) Il existe $u : X \to 2^\omega$ continue telle que $A = u^{-1}(A_{1+\xi})$.

On retrouve donc dans le corollaire 1.1.6 une version sans injectivité et en dimension 0 du théorème 1.1.4. L'hypothèse de dimension assure l'existence de suffisamment de fonctions continues : les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans 2^ω sont les fonctions constantes ! Le théorème 1.1.5 montre, entre autres, l'intérêt de la réduction par des fonctions continues pour la comparaison de la complexité des boréliens. La définition suivante apparaît alors naturelle :

Définition 1.1.7 *Soit Γ une classe de parties d'espaces polonais de dimension 0. On dit que Γ est une $\underline{classe\ de\ Wadge}$ s'il existe un espace polonais X_0 de dimension 0, et un borélien A_0 de X_0, tels que pour tout espace polonais X de dimension 0, et pour toute partie A de X, A est dans Γ si et seulement s'il existe $u\!:\!X\to X_0$ continue telle que $A\!=\!u^{-1}(A_0)$.*

Le corollaire 1.1.6 montre que toute classe de Baire $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ ou $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ est une classe de Wadge. Il y a eu des travaux, notamment d'A. Louveau et J. Saint Raymond (voir [Lo3], [Lo-SR2], [Lo-SR3]), pour décrire les classes de Wadge en termes d'opérations ensemblistes, comme pour les classes de Baire. Ceci amène à considérer de nouveaux ensembles. Par exemple, si ξ est un ordinal dénombrable et $(A_\eta)_{\eta<\xi}$ une suite croissante d'ouverts d'un espace polonais X, on note :

$$D((A_\eta)_{\eta<\xi})\!:=\!\{x\!\in\! X/\exists\eta\!<\!\xi\ \ x\!\in\! A_\eta\setminus(\bigcup_{\theta<\eta}A_\theta)\ \text{ et }\ \eta \text{ n'a pas la même parité que } \xi\}$$

On note $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ la classe des ensembles de la forme $D((A_\eta)_{\eta<\xi})$. De même, nous utiliserons la notation $D_\xi(\Gamma)$ dans le cas où $(A_\eta)_{\eta<\xi}\subseteq\Gamma$. On peut montrer que les seules classes de Wadge non stables par passage au complémentaire contenues dans $\mathbf{\Delta}^0_2\!:=\!\mathbf{\Sigma}^0_2\cap\mathbf{\Pi}^0_2$ sont les $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ et $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ (complémentaires des $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$). On obtient alors la hiérarchie suivante :

$$\begin{array}{llll} D_0(\mathbf{\Sigma}^0_1)\!=\!\{\emptyset\} & D_1(\mathbf{\Sigma}^0_1)\!=\!\text{ouverts} \quad \ldots & D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1) & \ldots \\ & & & \\ \check{D}_0(\mathbf{\Sigma}^0_1) & \check{D}_1(\mathbf{\Sigma}^0_1)\!=\!\text{fermés} \quad \ldots & \check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1) & \ldots \end{array}$$

La notation $\oplus_{\xi<\lambda}\,\mathbf{\Pi}^0_\xi$ (pour λ limite) désignera la classe des ensembles de la forme $\bigcup_n\ A_n$, où $A_n\!\in\!\bigcup_{\xi<\lambda}\,\mathbf{\Pi}^0_\xi$ et il existe une partition (X_n) en $\mathbf{\Delta}^0_1$ de l'espace ambiant telle que $A_n\!\subseteq\! X_n$.

La réduction par des fonctions continues définit le quasi-ordre de Wadge sur l'ensemble des boréliens de ω^ω :

$$A\leq_W A'\ \ \Leftrightarrow\ \ \exists u\!:\!\omega^\omega\!\to\!\omega^\omega \text{ continue telle que } A\!=\!u^{-1}(A').$$

Ce quasi-ordre est bien-fondé (au sens qu'il n'existe pas (B_n) infinie telle que $B_{n+1}\leq_W B_n$ et $B_n\not\leq_W B_{n+1}$ pour tout n). De plus, toute $\leq_W$-antichaîne est de cardinalité au plus deux (en fait de la forme $\{A,\neg A\}$, à l'équivalence $\equiv_W$ associée à $\leq_W$ près), par le théorème 1.1.5. Par le théorème 1.1.5 encore, si Γ est une classe de Wadge non stable par passage au complémentaire, $\mathbf{\Delta}^1_1\setminus\Gamma$ admet un unique (à $\equiv_W$ près) élément minimal (comme dans le corollaire 1.1.6).

Topologies effectives.

Nous terminons ce paragraphe en dimension un par des rappels topologiques fondamentaux. Ce sont des rappels de théorie effective. Le premier est montré dans [Lo2] (voir le théorème 3.4) :

Théorème 1.1.8 *(Louveau) Soit X un espace polonais récursivement présenté. La topologie Δ_X sur X est engendrée par $\Delta^1_1(X)$. Cette topologie est polonaise, plus fine que la topologie de X.*

Une autre topologie s'est avérée être essentielle en théorie descriptive durant ces dernières décennies. Ses propriétés peuvent être résumées dans l'énoncé qui suit :

Théorème 1.1.9 *Soit X un espace polonais récursivement présenté. La topologie Σ_X, appelée $\underline{topologie\ de\ Gandy\!-\!Harrington}$ sur X, est engendrée par $\Sigma^1_1(X)$. Elle est à base dénombrable, fortement α-favorable, plus fine que la topologie de X, non métrisable en général. Mais l'ensemble $\Omega_X\!:=\!\{x\!\in\! X/\omega^x_1\!=\!\omega^{\mathrm{CK}}_1\}$, muni de la restriction de Σ_X, est un espace polonais de dimension 0. En fait, la trace sur Ω_X de tout Σ^1_1 non vide de X est ouvert-fermé non vide de $[\Omega_X,\Sigma_X]$.*

1.2 La notion centrale de ce travail : classe de Wadge potentielle.

Passons maintenant au cas de la dimension deux. La notion habituelle de comparaison des relations d'équivalence boréliennes est le quasi-ordre de réduction borélienne. Ceci signifie que si X (resp. Y) est un espace polonais, et E (resp. F) une relation d'équivalence borélienne sur X (resp. Y), alors

$$E \leq_B F \ \Leftrightarrow\ \exists u\!:\!X\rightarrow Y \text{ borélienne telle que } E=(u\times u)^{-1}(F).$$

Ceci peut se schématiser de la manière suivante :

$$X\times X \quad \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1}\cline{3-3} E & \dashrightarrow & F \\ \cline{1-1}\cline{3-3} \neg E & \dashrightarrow & \neg F \\ \cline{1-1}\cline{3-3}\end{array} \quad Y\times Y$$

Notons que ceci a un sens même si E et F ne sont pas des relations d'équivalence. Nous allons étudier un invariant naturel pour $\leq_B$. Rappelons le résultat suivant (voir [K]) :

Théorème 1.2.1 *(Kuratowski) Soient X un espace polonais, et (B_n) une suite de boréliens de X. Il existe une topologie polonaise plus fine σ sur X (et ayant donc les mêmes boréliens) rendant les B_n ouverts-fermés.*

En particulier, si $u : X \rightarrow Y$ est borélienne, il existe σ rendant $u : [X,\sigma] \rightarrow Y$ continue. Si de plus $E=(u\times u)^{-1}(F)$ et F est dans une classe de Wadge Γ, alors $E\in\Gamma([X,\sigma]^2)$. Ceci conduit à la définition suivante, qui peut être trouvée dans [Lo2] :

Définition 1.2.2 *(Louveau) Soient X, Y des espaces polonais, A un borélien de $X\times Y$, et Γ une classe de Wadge. On dit que A est $\underline{potentiellement\ dans\ \Gamma}$ (ce qu'on note $A\in pot(\Gamma)$) s'il existe une topologie polonaise plus fine σ (resp. τ) sur X (resp. Y) telles que $A\in\Gamma([X,\sigma]\times[Y,\tau])$.*

Le théorème 1.2.1 montre que cette notion ne peut avoir véritablement de sens que pour des topologies produit. Cette notion est un invariant pour $\leq_B$: si F est pot(Γ) et $E\leq_B F$, alors E est pot(Γ). En utilisant cette notion, A. Louveau a montré que la collection des relations d'équivalence $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ n'est pas cofinale pour $\leq_B$, et déduit de cela la non-existence d'une relation d'équivalence borélienne maximum pour $\leq_B$. Le résultat suivant est montré dans [H-K-Lo] :

Théorème 1.2.3 *(Harrington-Kechris-Louveau) Soient X un espace polonais, E une relation d'équivalence borélienne sur X, et $E_0:=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/\exists n\in\omega\ \forall m\geq n\ \alpha(m)=\beta(m)\}$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) La relation E est pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) $E_0\leq_B E$ (avec u continue et injective).

Plus récemment, un autre résultat concernant les relations d'équivalence boréliennes a été montré. Pour l'énoncer, il nous faut le résultat suivant, qui est une conséquence de la bonne fondation du quasi-ordre de Wadge (voir 3.1 dans [L1]) :

Proposition 1.2.4 *Soient X, Y des espaces polonais, et A un borélien de $X\times Y$. Il existe une unique classe de Wadge, appelée $\underline{classe\ de\ Wadge\ potentielle\ de\ A}$, et notée Γ_A, telle que :*
(a) A est pot(Γ_A).
(b) Si Γ est une classe de Wadge strictement contenue dans Γ_A, alors A n'est pas pot(Γ).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant, qui est montré dans [Hj-K-Lo] :

Théorème 1.2.5 *(Hjorth-Kechris-Louveau) Les classes de Wadge potentielles des relations d'équivalence boréliennes induites par des actions boréliennes de sous-groupes fermés du groupe symétrique sont les suivantes :* $\boldsymbol{\Delta}^0_1$, $\boldsymbol{\Pi}^0_1$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$, $\boldsymbol{\Pi}^0_n$, $D_2(\boldsymbol{\Pi}^0_n)$ *(*$n\geq 3$*),* $\oplus_{\xi<\lambda}\ \boldsymbol{\Pi}^0_\xi$, $\boldsymbol{\Pi}^0_\lambda$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\lambda+1}$, $\boldsymbol{\Pi}^0_{\lambda+n}$, $D_2(\boldsymbol{\Pi}^0_{\lambda+n})$ *(*λ *limite,* $n\geq 2$*).*

Le résultat suivant, montré dans [Lo1], fournit des exemples naturels d'ensembles pot($\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$) :

Théorème 1.2.6 *(Louveau) Soient* X, Y *des espaces polonais, et* A *un borélien à coupes verticales* $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ *de* $X\times Y$*. Alors il existe une topologie polonaise plus fine* σ *sur* X *telle que* $A\in\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi([X,\sigma]\times Y)$*. En particulier,* A *est pot(*$\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$*).*

Une conséquence de ceci et du théorème 1.2.1 est que si un borélien A a une de ses projections dénombrable, donc en particulier si A est dénombrable, A est pot($\boldsymbol{\Delta}^0_1$). Une autre conséquence du théorème 1.2.1 est que les ensembles potentiellement ouverts sont les réunions dénombrables de rectangles boréliens. Une autre façon de voir la hiérarchie des boréliens du plan, en terme de complexité potentielle, est donc de noter qu'elle se fabrique de la même manière que celle de Baire, c'est-à-dire en alternant les opérations de réunion dénombrable et de passage au complémentaire, mais en partant cette fois des rectangles boréliens au lieu de partir des ouverts (ou des ouverts-fermés en dimension 0). Nous avons également vu que le théorème 1.2.1 implique que la notion de classe de Wadge potentielle ne peut avoir véritablement de sens que pour des topologies produit. C'est effectivement le cas. Ainsi par exemple la diagonale $\Delta(\omega^\omega):=\{(\alpha,\beta)\in\omega^\omega\times\omega^\omega/\alpha=\beta\}$ de ω^ω est fermée, mais pas potentiellement ouverte car non réunion dénombrable de rectangles. On a donc $\Gamma_{\Delta(\omega^\omega)}=\boldsymbol{\Pi}^0_1$. Ceci se généralise à toutes les classes de Wadge (voir 3.3 dans [L1]) :

Théorème 1.2.7 *Soit* Γ *une classe de Wadge. Il existe* A *dans* $\Gamma(\omega^\omega\times\omega^\omega)$ *tel que* $\Gamma_A=\Gamma$*.*

Nous voulons étudier d'autres structures que les relations d'équivalence (par exemple les quasi-ordres), et même les boréliens arbitraires du plan. Il nous faut d'autres notions de comparaison. Sur le même schéma que $\leq_B$, nous avons le quasi-ordre suivant. Soient X, Y, X', Y' des espaces polonais, et A (resp. A') un borélien de $X\times Y$ (resp. $X'\times Y'$). On pose

$$A\leq^r_B A'\ \Leftrightarrow\ \exists u\!:\!X\rightarrow X'\ \ \exists v\!:\!Y\rightarrow Y'\ \text{ boréliennes telles que } A=(u\times v)^{-1}(A').$$

Nous avons d'autres notions naturelles du même genre : $\leq^r_C$ si u et v sont continues, $\sqsubseteq^r_B$ si u et v sont injectives, $\sqsubseteq^r_C$ si u et v sont continues et injectives. Dans le cas où $X=Y$, $X'=Y'$ et $u=v$, on retrouve les notions classiques $\leq_B$, $\leq_C$, $\sqsubseteq_B$ et $\sqsubseteq_C$.

A. Louveau a remarqué que l'on peut associer un quasi-ordre $R_A\subseteq(X\times 2)^2$ à $A\subseteq X^2$:

$$(x,i)\ R_A\ (y,j)\ \ \Leftrightarrow\ \ (x,i)=(y,j)\text{ ou }[(x,y)\in A\text{ et }(i,j)=(0,1)].$$

Avec ceci, on peut voir que, du point de vue de la réduction borélienne, l'étude des quasi-ordres boréliens est essentiellement l'étude des boréliens arbitraires du plan. Plus précisément :

Proposition 1.2.8 *(Louveau) (a) Soient $A \subseteq X^2$, $A' \subseteq X'^2$, A ayant ses projections pleines. Alors $A \sqsubseteq^r_B A'$ équivaut à $R_A \leq_B R_{A'}$.*
(b) Si $A \subseteq X^2$ est $\sqsubseteq^r_B$-minimal parmi les ensembles non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$), alors R_A est $\leq_B$-minimal parmi les ordres partiels non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$), et $\sqsubseteq_B$-minimal parmi les quasi-ordres non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(c) Réciproquement, si R_A est $\leq_B$-minimal parmi les ordres partiels non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$), et si A a ses projections pleines, alors A est $\sqsubseteq^r_B$-minimal parmi les ensembles non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).

Ceci renforce la motivation pour l'étude des boréliens arbitraires du plan, du point de vue de la complexité potentielle. La question centrale que nous allons étudier était la question principale posée dans ma thèse de Doctorat, par A. Louveau. Elle est la suivante : y a-t-il un théorème d'Hurewicz pour les classes de Baire potentielles ?

1.3 Ensembles non potentiellement fermés minimaux.

Nous voulons étendre le théorème 1.2.3 aux boréliens arbitraires du plan. Ceci est possible partiellement (voir 4.13 dans [L1]) :

Théorème 1.3.1 *Soient $L_0 := \{(\alpha, \beta) \in 2^\omega \times 2^\omega / \alpha <_{lex} \beta\}$, X, Y des espaces polonais, et A un sous-ensemble pot($\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) de $X \times Y$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) $\neg\Delta(2^\omega) \sqsubseteq^r_C A$ ou $L_0 \sqsubseteq^r_C A$.

Les choses se compliquent au niveau $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Le résultat suivant est montré dans [L8] :

Théorème 1.3.2 *(a) Il existe une $\leq^r_B$-antichaîne parfaite $(A_\alpha)_{\alpha \in 2^\omega} \subseteq D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)(2^\omega \times 2^\omega)$ formée d'ensembles $\leq^r_B$-minimaux parmi les boréliens non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).*
(b) Il existe une $\leq_B$-antichaîne parfaite $(R_\alpha)_{\alpha \in 2^\omega}$ formée d'ensembles $\leq_B$-minimaux parmi les boréliens non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$). De plus, $(R_\alpha)_{\alpha \in 2^\omega}$ peut être une sous-classe de l'une des classes suivantes :
- Les "directed graphs" (i.e. les relations irréflexives).
- Les graphes (i.e. les relations irréflexives et symétriques).
- Les graphes orientés (i.e. les relations irréflexives et antisymétriques).
- Les quasi-ordres.
- Les quasi-ordres stricts (i.e. les relations irréflexives et transitives).
- Les ordres partiels.
- Les ordres partiels stricts (i.e. les relations irréflexives, antisymétriques et transitives).

Il est à noter que (a) vaut pour les huit quasi-ordres naturels $\leq^r_B$, $\leq^r_C$, $\sqsubseteq^r_B$, $\sqsubseteq^r_C$, $\leq_B$, $\leq_C$, $\sqsubseteq_B$, et $\sqsubseteq_C$. De même, (b) vaut pour $\leq_B$, $\leq_C$, $\sqsubseteq_B$ et $\sqsubseteq_C$. L'énoncé (b) nous dit, entre autres, que le cas des relations d'équivalence, pour lequel nous avons le théorème 1.2.3, est très spécifique. Le mélange de la symétrie et de la transitivité est très fort. Nous allons maintenant énoncer quelques étapes importantes de la démonstration de ce résultat, et donner les exemples explicitement.

Commençons par décrire une intuition de base de ce travail, qui était déjà présente dans [L1]. Comme nous le verrons, cette intuition a été à la fois une bonne et une mauvaise chose. Dans un espace métrique, un critère, pour affirmer qu'un sous-ensemble A n'est pas fermé, est de trouver dans A une suite convergeant vers un point hors de A.

Comme nous l'avons vu après le théorème 1.2.6, un singleton peut être rendu ouvert-fermé. Ce critère ne peut donc pas fonctionner en l'état pour reconnaître un sous-ensemble non potentiellement fermé d'un produit. Notons que si on a une topologie polonaise plus fine que la topologie d'un espace polonais, il y a un G_δ dense pour la topologie la moins fine sur lequel les deux topologies coïncident. L'idée était donc de remplacer les singletons par des ensembles rencontrant tout produit de deux G_δ denses. Un exemple naturel d'un tel objet est le graphe d'une fonction continue et ouverte ayant un gros domaine et une grosse image, au sens de la catégorie de Baire. Cette idée fonctionne au moins dans un sens, avec ce lemme très utile (voir 11 dans [L8], et aussi 3.5 dans [L1]) :

Lemme 1.3.3 *Soient X un espace polonais non vide, n un entier, D_{f_n}, $f_n[D_{f_n}]$ des G_δ denses d'ouverts de X, et $f_n\!:\!D_{f_n}\rightarrow f_n[D_{f_n}]$ continue et ouverte.*
(a) Soit G un G_δ dense de X. Alors $Gr(f_n)\subseteq\overline{Gr(f_n)\cap G^2}$.
(b) Soit $A^f:=\bigcup_n Gr(f_n)$. Si $\Delta(X)\subseteq\overline{A^f}\setminus A^f$, alors A^f n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).

Ceci conduit à la définition suivante (voir 13 dans [L8], et aussi 2.10 dans [L4]) :

Définition 1.3.4 *On dit que $(X,(f_n))$ est une $\underline{situation\ convergente}$ si :*
(a) X est un espace polonais parfait de dimension 0 non vide.
(b) f_n est un homéomorphisme partiel de domaine et d'image $\mathbf{\Delta}^0_1(X)$.
(c) La diagonale $\Delta(X)=\overline{A^f}\setminus A^f$, où $A^f:=\bigcup_n Gr(f_n)$.

Notons que si $(X,(f_n))$ est une situation convergente, le lemme 1.3.3 assure que A^f est $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$), puisque $A^f=\overline{A^f}\setminus\Delta(X)$.

Minimalité.

Nous noterons $f_n^B:=f_n|_{B\cap f_n^{-1}(B)}$ si $B\subseteq X$ et $(X,(f_n))$ est une situation convergente, de sorte que Gr$(f_n^B)=$Gr$(f_n)\cap B^2$. Nous avons la dichotomie suivante (voir 15 dans [L8]) :

Théorème 1.3.5 *Soient Y, Y' des espaces polonais, A un borélien de $Y\times Y'$, $(X,(f_n))$ une situation convergente. Supposons que $A\leq^r_B A^f$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) Il existe un borélien B de X, et une topologie τ plus fine sur B, tels que $([B,\tau],(f_n^B)_n)$ soit une situation convergente, et $A^f\cap B^2\leq^r_B A$.

La topologie de Gandy-Harrington et le théorème d'uniformisation de Jankov-von Neumann sont deux des outils utilisés pour montrer ce résultat. On a le corollaire suivant, montré dans [L8] :

Corollaire 1.3.6 *Soit $(X,(f_n))$ une situation convergente. Sont équivalentes :*
(a) A^f est $\leq^r_B$-minimal parmi les boréliens non pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) Pour tout borélien B de X, et toute topologie polonaise plus fine τ sur B, $A^f\leq^r_B A^f\cap B^2$ si $A^f\cap B^2$ n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(c) Pour tout borélien B de X, et toute topologie plus fine τ sur B, $A^f\leq^r_B A^f\cap B^2$ si $([B,\tau],(f_n^B)_n)$ est une situation convergente.

Ce résultat sera utilisé pour montrer la minimalité des exemples à venir. Nous allons chercher à assurer des réduction du type $A^f\leq^r_B A^f\cap B^2$ présent dans la condition (c). Pour ce faire, nous allons utiliser des propriétés d'acyclicité. Ces questions d'acyclicité joueront un rôle central dans d'autres parties de ce travail en dimension deux.

Définitions 1.3.7 *Soit R une relation sur un ensemble E.*
• *Un $\underline{R-chemin}$ est une suite finie $(e_i)_{i\leq n}\subseteq E$ telle que $(e_i,e_{i+1})\in R$ pour $i<n$.*
• *On dit que E est $\underline{R-connexe}$ s'il existe un R-chemin $(e_i)_{i\leq n}$ tel que $e_0=e$ et $e_n=e'$, pour $e,e'\in E$.*
• *Un $\underline{R-cycle}$ est un R-chemin $(e_i)_{i\leq n}$ tel que $n\geq 3$ et*

$$[0\leq i\neq j\leq n \text{ et } e_i=e_j] \ \Leftrightarrow\ \{i,j\}=\{0,n\}.$$

• *On dit que R est $\underline{acyclique}$ s'il n'existe pas de R-cycle.*

Rappelons que si R est symétrique et acyclique, $e,e'\in E$ et $(e_i)_{i\leq n}$ est un R-chemin tel que $e_0=e$ et $e_n=e'$, alors il existe un unique R-chemin $p_{e,e'}:=(f_j)_{j\leq m}$ sans répétition tel que $f_0=e$ et $f_m=e'$. Nous avons $|p_{e,e'}|=m+1$ (voir le théorème I.2.5 dans [B]).

Notations. Soit $\Theta:=(\theta_n)\subseteq 2^{<\omega}$ telle que $|\theta_n|=n$. Nous utiliserons deux exemples de tels Θ : $\theta_n=0^n$, et $\theta_n=s_n$ (où (s_n) est dense, dans le sens où pour tout $s\in 2^{<\omega}$ il existe n tel que $s\prec s_n$). Le second exemple est aussi utilisé dans [K-S-T] ; nous reviendrons en détail sur cet exemple plus tard. Nous définissons un arbre $\mathfrak{R}_\Theta$ sur 2×2 par

$$\mathfrak{R}_\Theta:=\{(e,e')\in(2\times 2)^{<\omega}/e=e' \text{ ou } \exists n\in\omega\ \exists w\in 2^{<\omega}\ \ (e,e')=(\theta_n 0w,\theta_n 1w)\}.$$

L'ensemble $s(\mathfrak{R}_\Theta)$ est le symétrisé de $\mathfrak{R}_\Theta$. La proposition qui suit (voir 18 dans [L8]) réunit quelques propriétés bien utiles dans la construction des réductions :

Proposition 1.3.8 *(a) $(2^n,s(\mathfrak{R}_\Theta))$ est connexe, pour tout $n\in\omega$.*
(b) La relation $s(\mathfrak{R}_\Theta)$ est acyclique.
(c) Si $e,e'\in 2^n$ et $l<n$ est maximal tel que $e(l)\neq e'(l)$, la coordonnée l est changée seulement une fois dans $p_{e,e'}$, et les autres coordonnées changées le sont à un niveau inférieur à l.

Notations. Nous donnons maintenant des exemples de situations convergentes où des cycles interviennent. Ces cycles sont la raison essentielle de l'orthogonalité à venir. Soient $S\subseteq\omega$, et

$$A^S:=\{(s0\gamma,s1\gamma)/\ s\in 2^{<\omega}, \text{Card}(s)\in S \text{ et } \gamma\in 2^\omega\}$$

(Card(s) est le nombre de 1 dans s). Nous définissons des homéomorphismes partiels

$$f^S_n: \bigcup_{s\in 2^n,\ \text{Card}(s)\in S} N_{s0} \ \rightarrow \bigcup_{s\in 2^n,\ \text{Card}(s)\in S} N_{s1}$$

par $f^S_n(s0\gamma):=s1\gamma$. Notons que $A^S=A^{f^S}$ est borélien. On peut montrer l'existence de $\mathfrak{A}:2^\omega\rightarrow 2^\omega$ continue telle que $\mathfrak{A}(S)$ soit un code de borélien pour A^S, si $S\subseteq\omega$. Notons que $(2^\omega,(f^S_n)_n)$ est une situation convergente si et seulement si S est infinie. Ceci est également équivalent à $A^S\notin\text{pot}(\mathbf{\Pi}^0_1)$. C'est pourquoi on ne va s'intéresser qu'au cas où S est infinie.

Soit $n_S:=\min\ S$, et $S':=\{n-n_S/n\in S\}$. Alors $0\in S'$ et les fonctions u et v definies par $u(\alpha)=v(\alpha):=1^{n_S}\alpha$ témoignent du fait que $A^{S'}\leq^r_B A^S$. C'est pourquoi on ne va s'intéresser qu'au cas où $0\in S$.

• Si $S \subseteq \omega$ et $t \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, nous posons $f_t^S := f_{t(0)}^S \ldots f_{t(|t|-1)}^S$, quand ceci a du sens. Nous définissons un arbre $\mathfrak{R}$ sur 2×2. Si $s, t \in 2^{<\omega}$, nous posons

$$s \, \mathfrak{R} \, t \;\Leftrightarrow\; |s| = |t| \text{ et } (N_s \times N_t) \cap A^S \neq \emptyset.$$

En particulier, si $n_0 < n_1$ et $1 \in S$, on obtient $f_{<n_0,n_1>}^S(0^\infty) = f_{<n_1,n_0>}^S(0^\infty)$. Ceci est un exemple typique des cycles que nous mentionnions. Dans ce cas, $s(\mathfrak{R})$ n'est pas acyclique puisque le chemin $< 0^{n_1+1}, 0^{n_0}10^{n_1-n_0}, 0^{n_0}10^{n_1-n_0-1}1, 0^{n_1}1, 0^{n_1+1} >$ est un $s(\mathfrak{R})$-cycle. Nous posons par ailleurs $f_n^C := f_n^S|_{C \cap f_n^{S^{-1}}(C)}$ si C est un borélien de 2^ω, quand S est fixée.

• Soit (H) l'hypothèse suivante sur S :

(H) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Soient } C \text{ un borélien de } 2^\omega,\ \sigma \text{ une topologie plus fine sur } C \text{ telle que } ([C,\sigma],(f_n^C)_n) \\ \text{soit une situation convergente, et } l, p \in \omega. \text{ Alors il existe } n \geq l \text{ et } \gamma \in D_{f_n^C} \text{ tels que} \\ \text{Card}(\gamma\lceil n) + (S \cap [0,p]) = S \cap (\text{Card}(\gamma\lceil n) + [0,p]). \end{array} \right.$

Le résultat qui suit (voir 19 dans [L8]) va conduire à une condition purement combinatoire sur S impliquant la minimalité de A^S parmi les boréliens non potentiellement fermés :

Théorème 1.3.9 *Soient S vérifiant* (H)*, B un borélien de 2^ω, et τ une topologie plus fine sur B telle que $([B,\tau],(f_n^B)_n)$ soit une situation convergente. Alors $A^S \sqsubseteq_C A^S \cap B^2$.*

Le rôle de l'acyclicité mentionnée dans la proposition 1.3.8 et dans les notations qui suivent est d'éviter les conflits de définition des ouverts intervenant dans la construction de la fonction de réduction. Le résultat qui suit (voir 20 dans [L8]) est une conséquence du corollaire 1.3.6 et du théorème 1.3.9 :

Corollaire 1.3.10 *L'ensemble S vérifie* (H) *si la condition suivante est satisfaite :*

(M) $$\forall p \in \omega \ \exists k \in \omega \ \forall q \in \omega \ \exists c \in \omega \cap [q, q+k] \ \ c + (S \cap [0,p]) = S \cap (c + [0,p]).$$

En particulier, la condition (M) *implique que A^S est minimal parmi les boréliens non potentiellement fermés pour $\leq_B^r$ (en fait pour les huit quasi-ordres naturels).*

Exemples. Soit $S_{m,F} := \{n \in \omega / n \ (\text{mod } m) \in \{0\} \cup F\}$, où $m \in \omega \setminus \{0\}$ et $F \subseteq m \setminus \{0\}$. Alors $S_{m,F}$ satisfait la condition (M). En particulier, A^ω est minimal. Mais ceci ne fournit qu'une famille dénombrable d'exemples. Pour avoir plus, nous avons besoin de notations.

Notations. Pour $\beta \in \omega^\omega$, on pose $S_\beta := \{\Sigma_{i<l}\ (1+\beta(i))/l \in \omega\}$. Notons que S_β est infinie, $0 \in S_\beta$, et que toute partie infinie S contenant 0 est de cette forme. De plus, la fonction $\beta \mapsto S_\beta$ est continue. Nous allons définir une famille $(\beta_\alpha)_{\alpha \in 2^\omega} \subseteq 2^\omega \subseteq \omega^\omega$. En fait, il existe au moins deux exemples :

• L'exemple original est le suivant. Pour $\alpha \in 2^\omega$, nous définissons inductivement $(s_{\alpha,n})_n \subseteq 2^{<\omega}$ comme suit : $s_{\alpha,0} := <0>$, $s_{\alpha,1} := <1>$, $s_{\alpha,n+2} := s_{\alpha,n}^{\alpha(n)+1} s_{\alpha,n+1}^{\alpha(n+1)+1}$. Notons que $s_{\alpha,n} \prec_{\neq} s_{\alpha,n+2}$, de sorte que $\beta_\alpha := \lim_{n\to\infty} s_{\alpha,2n} \in 2^\omega$ est défini.

• A. Louveau a trouvé un autre exemple pour lequel il est plus facile de vérifier la condition (M) (et plus tard ($\perp$) également). Pour $\alpha \in 2^\omega$, $n \in \omega$ et $\varepsilon \in 2$, on pose $\gamma_\alpha(4n+2\varepsilon) := \varepsilon$, $\gamma_\alpha(2n+1) := \alpha(n)$ (de sorte que γ_α a une infinité de 0 et de 1). Pour $i \in \omega$, on pose $(i)_0 := \max\{m \in \omega / 2^m \text{ divise } i+1\}$. Finalement, on pose $\beta_\alpha(i) := \gamma_\alpha((i)_0)$.

Notons que la fonction $\alpha \mapsto \beta_\alpha$ est continue, de sorte que la fonction $\alpha \mapsto A^{S_{\beta_\alpha}}$ est continue dans les codes. Le corollaire qui suit (voir 21 dans [L8]) donne une famille parfaite de boréliens non potentiellement fermés minimaux :

Corollaire 1.3.11 *Soit $\alpha \in 2^\omega$. Alors S_{β_α} satisfait la condition* (M). *En particulier, $A^{S_{\beta_\alpha}}$ est minimal parmi les boréliens non potentiellement fermés pour $\leq_B^r$ (en fait pour les huit quasi-ordres naturels).*

Orthogonalité.

Nous devons maintenant étudier le côté antichaîne. Le résultat de fond, où les différents cycles sont utilisés, est le suivant (voir 23 dans [L8]). La démonstration utilise également le théorème de Baire. Nous notons $A^{-1} := \{(y,x) \in X^2 / (x,y) \in A\}$ si $A \subseteq X^2$.

Théorème 1.3.12 *Soient S, S' satisfaisant la condition* (M). *Alors :*
(a) $A^S \perp_B^r A^{S'}$ si la condition suivante est satisfaite :

$$(\perp) \qquad \exists p \in \omega \ \forall c \in \omega \ \ c+(S \cap [0,p]) \neq S' \cap (c+[0,p]).$$

(b) $A^S \perp_B^r (A^{S'})^{-1}$ si la condition suivante est satisfaite :

$$(\perp^{-1}) \qquad \exists p \in \omega \ \forall c \in \omega \ \ c-(S \cap [0,p]) \neq S' \cap (c-[0,p]).$$

Corollaire 1.3.13 *Soient $\alpha \neq \alpha' \in 2^\omega$. Alors S_{β_α}, $S_{\beta_{\alpha'}}$ satisfont les conditions* (M), $(\perp)$ *et* $(\perp^{-1})$. *En particulier, $A^{S_{\beta_\alpha}} \perp_B^r A^{S_{\beta_{\alpha'}}}$ et $A^{S_{\beta_\alpha}} \perp_B^r (A^{S_{\beta_{\alpha'}}})^{-1}$.*

Le théorème 1.3.2.(a) est un corollaire de ce résultat. Nous avons vu que la fonction $\alpha \mapsto A^{S_{\beta_\alpha}}$ est continue dans les codes, et elle est injective par le corollaire 1.3.13. Ceci implique que $(A^{S_{\beta_\alpha}})_{\alpha \in 2^\omega}$ est une antichaîne parfaite pour $\leq_B^r$, formée de boréliens minimaux (par les corollaires 1.3.11 et 1.3.13). Le complément avec $(A^{S_{\beta_{\alpha'}}})^{-1}$ est utile pour montrer le théorème 1.3.2.(b) dans le cas des relations symétriques. La preuve du théorème 1.3.2.(b) utilise le théorème d'uniformisation de Jankov-von Neumann, de la même manière que la preuve du théorème 1.3.5.

Mal-fondation.

Notations. Soit $\mathfrak{S} : \omega^\omega \to \omega^\omega$ le shift : $\mathfrak{S}(\alpha)(k) := \alpha(k+1)$, β_0 la suite $(0,1,2,\ldots)$, et $\beta_n := \mathfrak{S}^n(\beta_0)$. Notons que $\beta_n(i) = i+n$. On pose $B_n := A^{S_{\beta_n}}$.

Proposition 1.3.14 *Soit n un entier. Alors $B_{n+1} \leq_B^r B_n$ et $B_n \not\leq_B^r B_{n+1}$. En particulier, le quasi-ordre $[D_2(\mathbf{\Sigma}_1^0) \setminus pot(\mathbf{\Pi}_1^0), \leq_B^r]$ n'est pas bien fondé (ceci vaut pour les huit quasi-ordres naturels).*

La preuve de cette proposition (voir 25 dans [L8]) utilise une nouvelle fois des cycles. Le théorème 1.3.2.(a) et la proposition 1.3.14 montrent que l'on peut trouver des antichaînes parfaites formées d'ensembles minimaux et des suites infinies strictement décroissantes pour le quasi-ordre $[\mathbf{\Delta}_1^1 \setminus pot(\mathbf{\Pi}_1^0), \leq_B^r]$, contrairement à ce qui se passe pour le quasi-ordre de Wadge (voir le paragraphe avant le théorème 1.1.8). Par ailleurs, par définition d'une classe de Wadge, on a :

$$<A> \subseteq <B> \Leftrightarrow \exists f \text{ continue telle que } A = f^{-1}(B).$$

Le résultat suivant est montré dans [L1] (voir le théorème 3.7) :

Théorème 1.3.15 *Il n'existe pas de classe de fonctions $\mathcal{C}$ telle que, pour A et B boréliens, on ait :*

$$\Gamma_A \subseteq \Gamma_B \ \Leftrightarrow \ \exists f \in \mathcal{C} \text{ telle que } A = f^{-1}(B).$$

Tout ceci montre que la situation en dimension deux est plus complexe qu'en dimension un.

Des exemples minimaux.

Notations. La démonstration du théorème 1.3.15 utilise le symétrisé $s(A^\omega)$ de l'ensemble A^ω défini après la proposition 1.3.8. Nous allons maintenant considérer des sous-ensembles de ces exemples. Dans les notations précédant la proposition 1.3.8, nous avons mentionné les suites denses $(s_n)\subseteq 2^{<\omega}$ telles que $|s_n| = n$. Un exemple de telle suite est donné par la bijection naturelle $\psi : \omega \to 2^{<\omega}$ ($\psi(0)=\emptyset$, $\psi(1)=0$, $\psi(2)=1$, $\psi(3)=0^2$, $\psi(4)=01$, $\psi(5)=10$, $\psi(6)=1^2, \ldots$). Comme $|\psi(n)| \leq n$, on peut définir $s_n := \psi(n)0^{n-|\psi(n)|}$. Ceci permet de poser :

$$A_1 := \{(s_n0\gamma, s_n1\gamma)/n\in\omega \text{ et } \gamma\in 2^\omega\}.$$

Notons que $A_1\subseteq A^\omega$. Le résultat suivant est montré dans [L8] (voir 29) :

Théorème 1.3.16 *L'ensemble A_1 est minimal parmi les boréliens non potentiellement fermés pour les huit quasi-ordres naturels.*

Ce résultat est en fait le corollaire du résultat qui suit. Pour l'énoncer, nous introduisons une notion (voir 26 dans [L8]), qui est également essentiellement considérée dans [L4] (voir 2.10) :

Définition 1.3.17 *On dit que $(X, (f_n))$ est une <u>situation acyclique</u> si :*
(a) $(X, (f_n))$ est une situation convergente, avec seulement $\Delta(X)\subseteq \overline{A^f}\setminus A^f$ dans la condition (c).
(b) Pour $v\in\omega^{<\omega}\setminus\{\emptyset\}$ et $\varepsilon\in\{-1, 1\}^{|v|}$, nous avons l'implication suivante :
$$[\forall i<|v|-1 \;\; v(i)\neq v(i+1)] \;\Rightarrow\; [\forall U\in\mathbf{\Delta}^0_1(X)\setminus\{\emptyset\}\ \exists V\in\mathbf{\Delta}^0_1(U)\setminus\{\emptyset\}\ \forall x\in V$$
$$f^{\varepsilon(|v|-1)}_{v(|v|-1)}\ldots f^{\varepsilon(0)}_{v(0)}(x) \text{ n'est pas défini ou pas dans } V].$$

Exemple. Nous définissons $f^1_n : N_{s_n0} \to N_{s_n1}$ par $f^1_n(s_n0\gamma) := s_n1\gamma$, de sorte que $A_1 = A^{f^1}$. Le couple $(2^\omega, (f^1_n))$ est une situation acyclique.

Théorème 1.3.18 *Soit $(X, (f_n))$ une situation acyclique. Alors $A_1 \sqsubseteq_C A^f$.*

La démonstration de ce résultat est très semblable à celle du théorème 1.3.9. Comme pour montrer le théorème 1.3.9, le contrôle des cycles permet de maîtriser la construction de la fonction de réduction. Cette idée peut être étendue. Nous allons maintenant le voir pour un type particulier de cycles : ceux issus de fonctions qui commutent. Nous avons vu que A^ω était minimal pour les huit quasi-ordres naturels après le corollaire 1.3.10. On peut se demander : parmi quelle famille de boréliens non potentiellement fermés ? Nous allons apporter des réponses à cette question. D'abord, on peut vérifier que si $S\subseteq\omega$ est infinie, contient 0 et des intervalles d'entiers arbitrairement grands, alors $A^\omega \sqsubseteq_C A^S$. Nous allons voir que A^ω est également minimal pour les situations où les fonctions commutent :

Définition 1.3.19 *On dit que $(X, (f_n))$ est une <u>situation avec commutativité</u> si :*
(a) X est un fermé parfait non vide de ω^ω.
(b) f_n est un homéomorphisme partiel de domaine et d'image $\mathbf{\Delta}^0_1(X)$ disjoints. De plus, $\alpha \in D_{f_n}$ implique que $\alpha <_{lex} f_n(\alpha)$.
(c) $\Delta(X)\subseteq\overline{A^f} \setminus A^f$, où $A^f := \bigcup_n Gr(f_n)\in\mathbf{\Pi}^0_2(X^2)$.
(d) Pour $\alpha\in f^{-1}_m(D_{f_n})$, on a $\alpha\in f^{-1}_n(D_{f_m})$ et $f_m(f_n(\alpha))=f_n(f_m(\alpha))$. De plus, les graphes des f_n sont deux à deux disjoints.

Un espace polonais de dimension 0 est homéomorphe à un fermé de ω^ω. La condition (a) est donc essentiellement identique à la condition (a) d'une situation convergente. Nous utilisons cette formulation pour la dernière partie de (b). La disjonction du domaine et de l'image de f_n, et l'inégalité $\alpha <_{\text{lex}} f_n(\alpha)$ viennent de problèmes de symétrie. Nous reviendrons sur cela. Nous reviendrons également sur la condition $\mathbf{\Pi}^0_2$. Elle est liée à des propriétés de transitivité. La première partie de la condition (d) exprime la commutativité des fonctions. On peut montrer le résultat suivant :

Théorème 1.3.20 *Soit $(X,(f_n))$ une situation avec commutativité. Alors $A^\omega \sqsubseteq_C A^f$.*

Remarques. Les conditions de la définition 1.3.19 peuvent paraître très restrictives. Mais le théorème 1.3.2 montre que l'on ne peut pas espérer juste quelques restrictions. Plus précisément :

(a) On a $A^\omega = A^f$, où $(2^\omega,(f_n))$ est une situation avec commutativité. Soit $f'_n : 2^\omega \to 2^\omega$ définie par $f'_n(\alpha)(k) := \alpha(k)$ si $k \neq n$, $1-\alpha(n)$ sinon. Alors $s(A^\omega) = \bigcup_n\ Gr(f'_n)$, donc $(2^\omega,(f'_n))$ n'est pas une situation avec commutativité, sinon on aurait $A^\omega \sqsubseteq_C s(A^\omega)$, ce qui est absurde puisque $s(A^\omega)$ est symétrique et A^ω ne l'est pas. Mais les deux raisons pour cela sont que $\alpha \not<_{\text{lex}} f'_n(\alpha)$, et que le domaine et l'image des bijections f'_n ne sont pas disjoints.

(b) De même, soit $\phi : \omega \to P_f \setminus \{0^\infty\}$ une bijection. On pose $f'_n(\alpha)(k) := \alpha(k)$ si $\phi(n)(k)=0$, 1 sinon. Ceci definit $f'_n : \{\alpha\in 2^\omega / \forall k\ \phi(n)(k)=0 \text{ ou } \alpha(k)=0\} \to 2^\omega$. Et $E_0 \cap L'_0 = \bigcup_q Gr(f'_n)$, où $L'_0 := \{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega / \forall i\in\omega\ \alpha(i)\leq\beta(i) \text{ et } \alpha\neq\beta\}$. Alors $(2^\omega,(f'_n))$ n'est pas une situation avec commutativité, sinon on aurait $A^\omega \sqsubseteq_C E_0\cap L'_0$, ce qui est absurde puisque $E_0\cap L'_0$ est transitive et A^ω ne l'est pas. Mais la raison pour cela est que $E_0\cap L'_0 \notin \mathbf{\Pi}^0_2$.

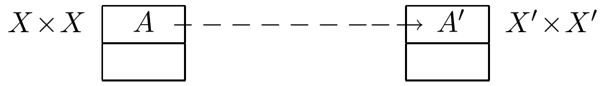
Question. Le théorème 1.3.2 fournit une antichaîne parfaite formée de non-potentiellement fermés minimaux. Nous avons vu que l'orthogonalité venait de cycles de nature différente. Le théorème 1.3.18 (resp. 1.3.20) donne un exemple minimal pour les situations acycliques (resp. avec commutativité). On peut montrer que A_1 et A^ω sont orthogonaux. Peut-on obtenir une antichaîne complète de non-potentiellement fermés minimaux (de taille nécessairement le continu), obtenue par des considérations sur les différentes configurations de cycles possibles ? C'était l'espoir à l'origine de l'étude des situations avec commutativité.

Réduction par homomorphisme.

Le théorème 1.3.2 montre qu'on ne peut pas espérer avoir A_1 comme seul ensemble non potentiellement fermé minimal pour n'importe lequel des huit quasi-ordres naturels, même à équivalence près (notons que ceci était déjà présent dans le corollaire 4.14.(b) de [L1]). On ne peut pas espérer non plus avoir un seul, ou un nombre fini, ou un ensemble dénombrable de tels objets. Pour avoir un résultat plus positif, il nous faut donc changer de notion de comparaison. Nous allons voir que c'est possible. Nous introduisons d'abord une notion intermédiaire, qui a permis dans les faits de débloquer complètement la situation au niveau un de la hiérarchie de Baire (pour caractériser les boréliens non potentiellement fermés). Dans [K-S-T], le quasi-ordre qui suit est défini. Soient X, X' des espaces polonais, et $A\subseteq X\times X$, $A'\subseteq X'\times X'$ des analytiques. On pose :

$$(X,A) \preceq_B (X',A') \ \Leftrightarrow\ \exists u : X\to X' \text{ borélienne telle que } A\subseteq (u\times u)^{-1}(A').$$

Une notion similaire $\preceq_C$ peut être définie si u est continue. On a donc le schéma suivant :



Le symétrisé $s(A_1)$ de A_1 est considéré dans [K-S-T], où le résultat qui suit est démontré :

Théorème 1.3.21 *(Kechris, Solecki, Todorčević) Soient X un espace polonais, et A un analytique de $X\times X$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) $(X,A)\preceq_B(\omega,\neq)$.
(b) $(2^\omega,A_1)\preceq_C(X,A)$.

Dans l'énoncé original de [K-S-T], A est un graphe, et $s(A_1)$ remplace A_1. Le théorème 1.3.21 peut être obtenu sans changer la preuve de [K-S-T].

Remarque. Il est clair qu'un graphe analytique (X,A) est de nombre chromatique borélien dénombrable (c'est-à-dire satisfait la condition (a) du théorème 1.3.21) si et seulement si A est séparable de $\Delta(X)$ par un ensemble pot($\mathbf{\Delta}^0_1$). La remarque suivant la définition 1.3.4 implique que $(2^\omega,s(A^f))$ n'est pas de nombre chromatique borélien dénombrable si $(X,(f_n))$ est une situation convergente.

Un exemple minimum.

Le résultat suivant est montré dans [L8] (voir le théorème 9) :

Corollaire 1.3.22 *Soient X, Y des espaces polonais, et A, B des analytiques disjoints de $X\times Y$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) Il existe $u:2^\omega\rightarrow X$, $v:2^\omega\rightarrow Y$ continues telles que $A_1\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ et $\overline{A_1}\setminus A_1\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$.

La preuve étant courte, nous la donnons, afin d'éclairer l'évolution des idées dans ce travail.

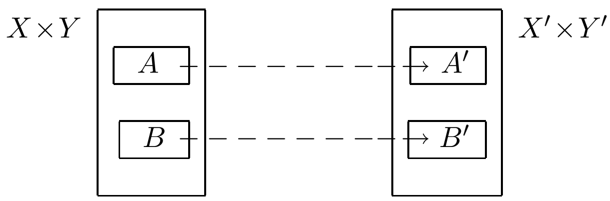
Preuve. On ne peut pas avoir (a) et (b) simultanément. Car si D est potentiellement fermé et sépare A de B, on obtient $A_1=(u\times v)^{-1}(D)\cap\overline{A_1}$, donc A_1 serait pot($\mathbf{\Pi}^0_1$), ce qui contredit le fait que $(2^\omega,(f^1_n))$ soit en fait une situation convergente.

• Soient $f:\omega^\omega\rightarrow X\times Y$ continue telle que $f[\omega^\omega]=B$, et f_0 (resp. f_1) la première (resp. seconde) coordonnée de f, de sorte que $(f_0\times f_1)[\Delta(\omega^\omega)]=B$. On pose $R:=(f_0\times f_1)^{-1}(A)$, qui est une relation analytique sur ω^ω. Par le théorème 1.3.21, ou bien il existe $c:\omega^\omega\rightarrow\omega$ borélienne telle que $(\alpha,\beta)\in R$ implique que $c(\alpha)\neq c(\beta)$, ou bien il existe $u_0:2^\omega\rightarrow\omega^\omega$ continue telle que $(\alpha,\beta)\in A_1$ implique que $(u_0(\alpha),u_0(\beta))\in R$.

• Dans le premier cas, on définit $C_n:=c^{-1}(\{n\})$. Nous avons $\Delta(\omega^\omega)\subseteq\bigcup_n C^2_n\subseteq\neg R$, de sorte que $B\subseteq\bigcup_n f_0[C_n]\times f_1[C_n]\subseteq\neg A$. Un argument standard de réflexion montre l'existence d'une suite (X_n) (resp. (Y_n)) de boréliens de X (resp. Y) telle que $\bigcup_n f_0[C_n]\times f_1[C_n]\subseteq\bigcup_n X_n\times Y_n\subseteq\neg A$. Mais $\bigcup_n\ X_n\times Y_n$ est pot($\mathbf{\Sigma}^0_1$), donc on est dans le cas (a).

• Dans le second cas, soient $u:=f_0\circ u_0$, $v:=f_1\circ u_0$. Ces applications satisfont la conclusion de la condition (b) puisque $\overline{A_1}\setminus A_1\subseteq\Delta(2^\omega)$. $\square$

Le bon schéma de réduction semble donc être le suivant :



Corollaire 1.3.23 *Soient X, Y des espaces polonais, et A un borélien de $X\times Y$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) Le borélien A est pot($\mathbf{\Pi}^0_1$).
(b) Il existe $u:2^\omega\to X$, $v:2^\omega\to Y$ continues telles que $A_1=(u\times v)^{-1}(A)\cap\overline{A_1}$.
De plus, on ne peut pas enlever $\overline{A_1}$.

Il est à noter également que l'on peut déterminer la complexité exacte d'un ensemble A_1 vérifiant la conclusion du corollaire 1.3.23 : A_1 est $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ non pot($\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$) (voir la remarque (b) page 150 dans [L4]). On doit donc avoir $\Gamma_{A_1}=D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. On obtient donc un ensemble non potentiellement fermé minimum en acceptant de ne pas demander une réduction sur tout le produit. Le corollaire 1.3.23 est essentiellement montré dans [L4] quand A est supposé pot($\mathbf{\Delta}^0_3$) (avec un autre exemple A_1). La logique de la preuve du théorème 2.9 de [L4] est de suivre l'idée, évoquée avant le lemme 1.3.3, de remplacer les singletons par des graphes convenables. L'hypothèse de complexité sur A permet d'assurer l'existence de tels graphes dans A et son complémentaire.

Cette idée a été une bonne chose dans la mesure où elle a permis de conjecturer le résultat final 1.3.23 sous sa bonne forme. Elle a également permis d'autres développements dans le domaine des résultats d'uniformisation partielle, présents dans les articles [L1]-[L3].

Elle a également été une mauvaise chose, car l'intuition n'était pas totalement correcte. Il a fallu attendre le résultat de [K-S-T] avant de trouver le résultat général au niveau un. L'erreur était de penser qu'à l'arrivée, c'est-à-dire dans $X\times Y$, on devait retrouver la même chose qu'au départ, à savoir une suite de graphes s'accumulant sur un autre graphe. Or la preuve du corollaire 1.3.22 montre que l'on peut espérer ceci au niveau ouvert : l'image d'une réunion dénombrable de rectangles par une fonction produit est encore de cette forme. Mais ceci devient complètement faux au niveau dual des fermés : on a vu que l'image de la diagonale, qui est fermée, par une fonction produit, peut être n'importe quel analytique. C'est aussi ceci qui fait qu'il faut imaginer une autre preuve pour généraliser le corollaire 1.3.22 aux niveaux supérieurs de la hiérarchie de Baire.

Pour cette généralisation, la bonne façon de voir A_1 semble être la suivante. Soit T_1 l'arbre associé à $\overline{A_1}=A_1\cup\Delta(2^\omega)$: $T_1=\{(s,t)\in 2^{<\omega}\times 2^{<\omega}/s=t$ ou $\exists n\in\omega\ \exists w\in 2^{<\omega}\ (s,t)=(s_n0w,s_n1w)\}$. L'application $\Delta:2^\omega\times 2^\omega\to 2^\omega$ est la différence symétrique : pour $m\in\omega$,

$$\Delta(\alpha,\beta)(m)=(\alpha\Delta\beta)(m)=1\ \Leftrightarrow\ \alpha(m)\neq\beta(m).$$

Soit $S_1:=\{\gamma\in 2^\omega/\exists i\in\omega\ \gamma(i)=1\}$ le vrai ouvert unidimensionnel typique. On a

$$A_1=\{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega/(\alpha,\beta)\in\lceil T_1\rceil \text{ et } \alpha\Delta\beta\in S_1\}.$$

Ceci peut être généralisé.

1.4 Ensembles non potentiellement Π^0_ξ minimums.

Nous en venons maintenant à la généralisation des corollaires 1.3.22 et 1.3.23 à tous les niveaux de la hiérarchie de Baire. Ceci répond à la question d'A. Louveau mentionnée à la fin de la section 1.2. Le corollaire 1.3.23 montre que l'on ne peut pas avoir un seul ensemble non potentiellement fermé minimal avec réduction sur tout le produit. Par contre, cette réduction est possible sur un certain fermé, en l'occurence l'adhérence de A_1.

Cette adhérence n'explique pas suffisamment pourquoi on n'a pas réduction sur tout le produit. Nous avons vu après le théorème 1.3.20 que ceci venait du théorème 1.3.2. Ce dernier se montre entre autres avec le théorème 1.3.12, qui fournit une antichaîne parfaite en considérant des cycles de nature différente. Ceci va fournir une meilleure explication qu'avec l'adhérence : nous allons la remplacer par un certain fermé, que l'on verra comme l'ensemble des branches d'un arbre sur 2×2. Cet arbre aura des propriétés d'acyclicité qui vont permettre la généralisation annoncée. Ceci conduit à la définition suivante (voir 9 dans [L10]) :

Définition 1.4.1 *On dit qu'un* <u>*arbre*</u> T *sur* 2×2 *est* $\underline{uniform\acute{e}ment\ acyclique}$ *si, pour tout* $p>0$,
(a) La relation $T\cap(2^p\times 2^p)$ *est irréflexive et antisymétrique.*
(b) La relation symétrique $s(T\cap(2^p\times 2^p))$ *engendrée par* $T\cap(2^p\times 2^p)$ *est acyclique.*

Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation annoncée, en deux parties comme en dimension un (voir 10 et 11 dans [L10]) :

Théorème 1.4.2 *(Debs-Lecomte) Soient* T *un arbre uniformément acyclique,* $\xi<\omega_1$, $A_{1+\xi}$ *dans* $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)$, X, Y *des espaces polonais, et* A, B *des analytiques disjoints de* $X\times Y$. *L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) L'ensemble A *est séparable de* B *par un ensemble pot(*$\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}$*).*
(b) Il existe $u:2^\omega\to X$, $v:2^\omega\to Y$ *continues telles que les inclusions* $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ *et* $\lceil T\rceil\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$ *soient satisfaites.*

Ce résultat a été initialement montré par D. Lecomte quand $1+\xi$ est un ordinal successeur. G. Debs l'a ensuite montré quand $1+\xi$ est un ordinal limite. Il est à noter qu'on peut déduire le théorème 1.1.2 de la preuve du théorème 1.4.2. Le théorème 1.4.2 est l'analogue du théorème 1.1.2 en dimension deux (voir [Lo-SR1], et aussi le théorème III-2.1 dans [D-SR]).

Théorème 1.4.3 *Il existe des exemples explicites de :*
(a) Un arbre uniformément acyclique T.
(b) Un ensemble $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)\setminus$*pot(*$\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}$*), pour tout* $\xi<\omega_1$.

Une conséquence des théorèmes 1.4.2 et 1.4.3 est la suivante (voir 12 dans [L10]) :

Corollaire 1.4.4 *(Debs-Lecomte) Soit* $\xi<\omega_1$. *Il existe un borélien* $A_{1+\xi}$ *de* $2^\omega\times 2^\omega$ *tel que, pour* X, Y *polonais, et pour* A, B *analytiques disjoints de* $X\times Y$, *exactement l'une des éventualités suivantes se produise :*
(a) L'ensemble A *est séparable de* B *par un ensemble pot(*$\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}$*).*
(b) Il existe $u:2^\omega\to X$, $v:2^\omega\to Y$ *continues telles que les inclusions* $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ *et* $\overline{A_{1+\xi}}\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$ *soient satisfaites.*
De plus, on ne peut pas remplacer $\overline{A_{1+\xi}}\setminus A_{1+\xi}$ *par* $(2^\omega\times 2^\omega)\setminus A_{1+\xi}$.

<u>Acyclicité.</u>

Ce dernier complément de non-remplacement a été montré initialement par D. Lecomte quand $\xi\leq 1$ (voir par exemple le corollaire 1.3.23). G. Debs a ensuite trouvé une preuve plus simple, qui de plus est valable dans le cas général (voir [L10]). Une fois de plus, des cycles sont impliqués.

Question. Nous avons vu avec le corollaire 1.3.22 que le cas $\xi=0$ du corollaire 1.4.4 venait de la dichotomie 1.3.21 sur les graphes. Est-ce qu'inversement les exemples du théorème 1.4.3 pourraient donner de nouveaux résultats de dichotomie sur les graphes ?

Nous allons maintenant décrire les principales étapes de la preuve des trois derniers résultats. Certains arguments présents dans la preuve initiale du théorème 1.4.2 de D. Lecomte (quand $1+\xi$ est un ordinal successeur) peuvent être remplacés par l'énoncé suivant (voir 15 et 16 dans [L10]) :

Définition 1.4.5 *(Debs) Soient E, X, Y des ensembles, $S\subseteq E^2$ et $\Phi: E^2\rightarrow 2^{X\times Y}$. On dit que $\phi=\phi_0\times\phi_1: E^2\rightarrow X\times Y$ est un $\underline{\pi-sélecteur\ sur\ S\ pour\ \Phi}$ si :*
(a) $\phi(e,e')=(\phi_0(e),\phi_1(e'))$, pour $(e,e')\in E^2$.
(b) $\phi(s)\in\Phi(s)$, pour $s\in S$.

Notation. Soient X,Y des espaces polonais récursivement présentés. On pose $\tau_1:=\Delta_X\times\Delta_Y$. Par le théorème 1.1.8, cette topologie rentre bien dans le cadre, précisé par la définition 1.2.2, des topologies produit de deux topologies polonaises. Cette topologie a été considérée dans [Lo2] (voir le théorème 3.4, que nous retrouverons plus tard).

Proposition 1.4.6 *(Debs) Soient E un ensemble fini, $S\subseteq E^2$ irréflexive et antisymétrique telle que la relation symétrique $s(S)$ engendrée par S soit acyclique, et X,Y des espaces polonais récursivement présentés.*
(a) Soient $s_0\in S$, et $\Phi,\Psi: E^2\rightarrow\Sigma^1_1(X\times Y)$. On suppose que $\Phi(s)=\Psi(s)$ si $s\neq s_0$, et que $\Phi(s_0)\subseteq\overline{\Psi(s_0)}^{\tau_1}$. Alors Ψ a un π-sélecteur sur S si Φ en admet un.
(b) Soient $\Psi: E^2\rightarrow\Sigma^1_1(X\times Y)$, et $\overline{\Psi}: E^2\rightarrow\Sigma^1_1(X\times Y)$ définie par $\overline{\Psi}(s):=\overline{\Psi(s)}^{\tau_1}$. Alors Ψ a un π-sélecteur sur S si $\overline{\Psi}$ en admet un.

<u>Les topologies.</u>

Pour énoncer le prochain résultat intermédiaire dont nous avons besoin, il nous faut des notations.

Notations. Soient X,Y des espaces polonais récursivement présentés.

• Rappelons l'existence d'ensembles Π^1_1, $W^X\subseteq\omega$, $C^X\subseteq\omega\times X$ tels que $\Delta^1_1(X)=\{C^X_n/n\in W^X\}$ et $\{(n,x)\in\omega\times X/n\in W^X \text{et } x\notin C^X_n\}\in\Pi^1_1(\omega\times X)$ (voir [H-K-Lo], théorème 3.3.1).

• Posons pot$(\mathbf{\Pi}^0_0):=\mathbf{\Delta}^1_1(X)\times\mathbf{\Delta}^1_1(Y)$ et, pour $\xi<\omega_1^{\text{CK}}$,

$$W^{X\times Y}_\xi:=\{p\in W^{X\times Y}/C^{X\times Y}_p\in\text{pot}(\mathbf{\Pi}^0_\xi)\}.$$

Nous posons également $W^{X\times Y}_{<\xi}:=\bigcup_{\eta<\xi}\ W^{X\times Y}_\eta$.

Le résultat qui suit est montré dans [Lo2] (voir les définitions 2.1, 2.7, les théorèmes 2.8, 3.4, et le corollaire 2.10) :

Théorème 1.4.7 *(Louveau) Soient $\xi<\omega_1^{CK}$, X, Y des espaces polonais récursivement présentés. Alors $W^{X\times Y}_\xi$ et $W^{X\times Y}_{<\xi}$ sont Π^1_1. Si de plus A, B sont des Σ^1_1 disjoints de $X\times Y$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.
(b) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble $\Delta^1_1\cap$ pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.
(c) L'ensemble A est séparable de B par un ensemble $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(\tau_1)$.

Notation. Soient X, Y des espaces polonais récursivement présentés, $2 \leq \xi < \omega_1^{\mathrm{CK}}$. La topologie τ_ξ est engendrée par $\Sigma_1^1(X \times Y) \cap \mathbf{\Pi}^0_{<\xi}(\tau_1)$. Notons que $\mathbf{\Sigma}^0_1(\tau_\xi) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(\tau_1)$, d'où $\mathbf{\Pi}^0_1(\tau_\xi) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_\xi(\tau_1)$. Ces topologies sont similaires à celles considérées dans [Lo1] (voir la définition 1.5 dans [Lo1]), et aussi à celles considérées dans [Lo2] (voir (iii) page 24 dans [Lo2]). Le théorème 1.4.7 peut être utilisé pour montrer le lemme suivant (voir 18 dans [L10]) :

Lemme 1.4.8 *Soient X, Y des espaces polonais récursivement présentés, et $\xi < \omega_1^{CK}$.*
(a) Soit $S \in \Sigma_1^1(X \times Y)$. Alors $\overline{S}^{\tau_{1+\xi}} \in \Sigma_1^1(X \times Y)$.
(b) Soient $n \in \omega$, $1 \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n \leq 1+\xi$, $S_1, \ldots, S_n$ des Σ_1^1, U, V des Δ_1^1 et $1 \leq r \leq n$. Alors
(i) $\bigcap_{1 \leq q \leq r} \overline{S_q}^{\tau_{\xi_q}} \cap (U \times V) \neq \emptyset \Rightarrow S_r \cap \bigcap_{1 \leq q < r} \overline{S_q}^{\tau_{\xi_q}} \cap (U \times V) \neq \emptyset$.
(ii) Soit $1 \leq r' < n$. Alors
$[S_{r'} \subseteq \overline{S_{r'+1}}^{\tau_{\xi_{r'+1}}}$ *et* $\bigcap_{1 \leq q \leq r'} \overline{S_q}^{\tau_{\xi_q}} \cap (U \times V) \neq \emptyset] \Rightarrow S_{r'+1} \cap \bigcap_{1 \leq q \leq r'} \overline{S_q}^{\tau_{\xi_q}} \cap (U \times V) \neq \emptyset$.
(iii) Supposons que $S_{r'} \subseteq \overline{S_{r'+1}}^{\tau_{\xi_{r'+1}}}$, pour $1 \leq r' < r$. Alors $S_r \cap \bigcap_{1 \leq q < r} \overline{S_q}^{\tau_{\xi_q}} \cap (U \times V)$ est τ_1-dense dans $\overline{S_1}^{\tau_1} \cap (U \times V)$.

Représentation des boréliens.

Le corollaire 1.4.4 a d'abord été montré “à la main” pour $\xi \leq 2$. Plus précisément, la fonction $u \times v$ est obtenue par une construction à la Cantor, c'est-à-dire que $(u(\alpha), v(\beta)) = \bigcap_k U_{(\alpha,\beta)\lceil n_k}$, où les $U_{(s,t)}$ sont des Σ_1^1 convenables, et $(n_k)_k$ une sous-suite de la suite des entiers naturels. Cette sous-suite peut-être la suite des entiers (presque) complète quand $\xi = 0$ (au niveau des fermés), mais pas pour ξ plus grand. Le défaut majeur de ces preuves initiales était de chercher trop explicitement une bonne sous-suite $(n_k)_k$. La formule est raisonnablement simple au niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$, mais très compliquée au niveau $\mathbf{\Pi}^0_3$. D'une manière telle que toute généralisation dans cet esprit est probablement impossible. Il se trouve que le théorème de représentation des boréliens de G. Debs et J. Saint Raymond est précisément essentiellement un résultat d'extraction de sous-suites (voir [D-SR]). C'est l'un des outils importants pour montrer le théorème 1.4.2. Le théorème de représentation précise le résultat classique de Lusin affirmant que tout borélien d'un espace polonais est l'image d'un fermé de l'espace de Baire par une bijection continue. Les définitions qui suivent sont dans [D-SR] :

Définitions 1.4.9 *(Debs-Saint Raymond) Soit a un ensemble fini. Une relation d'ordre partiel R sur $a^{<\omega}$ est une relation d'arbre si, pour $t \in a^{<\omega}$,*
(a) $\emptyset \; R \; t$.
(b) L'ensemble $P_R(t) := \{s \in a^{<\omega} / s \; R \; t\}$ est fini et totalement ordonné par R.
Typiquement, la relation d'extension large $\prec$ est une relation d'arbre.
• *Soit R une relation d'arbre. Une $R-branche$ est un sous-ensemble de $a^{<\omega}$ totalement ordonné par R qui est $\subseteq$-maximal. On note $[R]$ l'ensemble des R-branches infinies.*
On munit $(a^{<\omega})^\omega$ du produit de la topologie discrète sur $a^{<\omega}$. Si R est une relation d'arbre, $[R] \subseteq (a^{<\omega})^\omega$ est muni de la topologie induite par celle de $(a^{<\omega})^\omega$. C'est un fermé de $(a^{<\omega})^\omega$. L'application $\theta : a^\omega \rightarrow [\prec]$ définie par $\theta(\gamma) := [\gamma\lceil j]_j$ est un homéomorphisme.
• *Soient R, S des relations d'arbres, avec $R \subseteq S$. $L'application\ canonique$ $\Pi : [R] \rightarrow [S]$ est définie par la formule suivante :*

$$\Pi(A) := l'unique\ S\text{-branche contenant } A.$$

• *Soit S une relation d'arbre. On dit que $R\subseteq S$ est* <u>*distinguée*</u> *dans S si*

$$\forall s,t,u\in a^{<\omega} \qquad \left.\begin{array}{c} s\,S\,t\,S\,u \\ s\,R\,u \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; s\,R\,t.$$

Par exemple, soit C un fermé de a^ω, et :

$$s\,R\,t \;\Leftrightarrow\; s\prec t \text{ et } N_t\cap C\neq\emptyset.$$

Alors R est distinguée dans $\prec$. Dans ce cas, la distinction exprime le fait que "quand on quitte le fermé, c'est pour toujours". C'est la notion fondamentale pour montrer le théorème qui suit.
• *Soit $\eta<\omega_1$. Une famille $(R^{(\rho)})_{\rho\leq\eta}$ de relations d'arbre est une* <u>*$famille\ de\ résolution$*</u> *si :*
(a) $R^{(\rho+1)}$ est un sous-arbre distingué de $R^{(\rho)}$, pour tout $\rho<\eta$.
(b) $R^{(\lambda)}=\bigcap_{\rho<\lambda} R^{(\rho)}$, pour tout ordinal limite $\lambda\leq\eta$.

Le résultat qui suit est une partie du théorème I-6.6 de [D-SR] :

Théorème 1.4.10 *(Debs-Saint Raymond) Soient $\eta<\omega_1$, E un sous-ensemble $\mathbf{\Pi}^0_{\eta+1}$ de $[\prec]$. Alors il existe une famille de résolution $(R^{(\rho)})_{\rho\leq\eta}$ telle que :*
(a) $R^{(0)}=\prec$.
(b) L'application canonique $\Pi:[R^{(\eta)}]\rightarrow[\prec]$ est une bijection.
(c) L'ensemble $\Pi^{-1}(E)$ est un fermé de $[R^{(\eta)}]$ (et de $(a^{<\omega})^\omega$).

<u>Le théorème de réduction.</u>

Le théorème 1.4.10 est utilisé, avec entre autres la proposition 1.4.6 et le lemme 1.4.8, pour montrer le résultat suivant (voir 23 dans [L10]) :

Théorème 1.4.11 *Soient T un arbre uniformément acyclique, $\xi<\omega_1^{CK}$ tel que $1+\xi$ soit un ordinal successeur, $A_{1+\xi}\in\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}(\lceil T\rceil)$, X, Y des espaces polonais récursivement présentés, et A, B des Σ^1_1 disjoints de $X\times Y$. L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) $\overline{A}^{\tau_{1+\xi}}\cap B=\emptyset$.
(b) Il existe $u:2^\omega\rightarrow X$, $v:2^\omega\rightarrow Y$ continues telles que les inclusions $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ et $\lceil T\rceil\setminus A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$ soient satisfaites.

L'ensemble $\lceil T\rceil\setminus A_{1+\xi}$ est vu comme une partie E de $[\prec]$ en utilisant l'homéomorphisme θ avec $a:=2\times 2$. On peut donc lui appliquer le théorème 1.4.10. Une des idées fondamentales pour montrer le théorème 1.4.11 est l'existence d'un lien profond entre d'une part les relations distinguées les unes dans les autres de plus en plus fines, et d'autre part les adhérences pour les topologies τ_ξ des Σ^1_1 intervenant dans la construction, de plus en plus fines elles aussi. Pour le cas des ordinaux limites, il faut des définitions supplémentaires, présentes dans [D-SR] :

Définitions 1.4.12 *(Debs-Saint Raymond) Soit a un ensemble fini.*
• *Soit R une relation d'arbre sur $a^{<\omega}$. Si $t\in a^{<\omega}$, alors $h_R(t)$ est le nombre de R-prédécesseurs stricts de t. On a donc $h_R(t)=Card(P_R(t))-1$.*
• *Soit $\xi<\omega_1$ un ordinal limite infini. Une* <u>*$famille\ de\ résolution$*</u> *$(R^{(\rho)})_{\rho\leq\xi}$ est dite* <u>*$uniforme$*</u> *si*

$$\forall k\in\omega\;\exists\eta_k<\xi\;\forall s,t\in a^{<\omega}\;\;[min(h_{R^{(\xi)}}(s),h_{R^{(\xi)}}(t))\leq k \text{ et } s\,R^{(\eta_k)}\,t] \;\Rightarrow\; s\,R^{(\xi)}\,t.$$

Le résultat qui suit est une partie du théorème I-6.6 de [D-SR].

Théorème 1.4.13 *(Debs-Saint Raymond) Soient $\xi<\omega_1$ un ordinal limite infini, E un sous-ensemble $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ de $[\prec]$. Alors il existe une famille de résolution uniforme $(R^{(\rho)})_{\rho\leq\xi}$ telle que :*
(a) $R^{(0)}=\prec$.
(b) L'application canonique $\Pi:[R^{(\xi)}]\rightarrow[\prec]$ est une bijection.
(c) L'ensemble $\Pi^{-1}(E)$ est un fermé de $[R^{(\xi)}]$ (et de $(a^{<\omega})^\omega$).

Il est utilisé pour montrer le résultat suivant (voir 26 dans [L10]) :

Théorème 1.4.14 *(Debs-Lecomte) Soient T un arbre uniformément acyclique, $\xi<\omega_1^{CK}$ un ordinal limite infini, $A_\xi\in\mathbf{\Sigma}^0_\xi(\lceil T\rceil)$, X, Y des espaces polonais récursivement présentés, et A, B des Σ^1_1 disjoints de $X\times Y$. L'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) $\overline{A}^{\tau_\xi}\cap B=\emptyset$.
(b) Il existe $u:2^\omega\rightarrow X$, $v:2^\omega\rightarrow Y$ continues telles que $A_\xi\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ et $\lceil T\rceil\setminus A_\xi\subseteq(u\times v)^{-1}(B)$.

Le théorème 1.4.2 est un corollaire des théorèmes 1.4.11 et 1.4.14.

Les exemples.

Nous explicitons maintenant les exemples du théorème 1.4.3. L'arbre T doit être suffisamment petit puisque nous avons vu qu'une réduction sur tout le produit est impossible. Mais en même temps il doit être suffisamment gros pour assurer l'existence d'ensembles compliqués, comme dans l'énoncé du théorème 1.4.3.(b).

Notation. Soit $\varphi:\omega\rightarrow\omega^2$ la bijection naturelle. Plus précisément, on pose, pour $q\in\omega$,

$$M(q):=\max\{m\in\omega/\Sigma_{k\leq m}\ k\leq q\}.$$

Puis on définit $\varphi(q)=((q)_0,(q)_1):=(M(q)-q+(\Sigma_{k\leq M(q)}\ k),q-(\Sigma_{k\leq M(q)}\ k))$. On peut vérifier que $<n,p>:=\varphi^{-1}(n,p)=(\Sigma_{k\leq n+p}\ k)+p$. Plus concrètement,

$$\varphi[\omega]=\{(0,0);(1,0);(0,1);(2,0);(1,1);(0,2);\ldots\}.$$

La définition qui suit est présente dans [L10] (voir 27) :

Définition 1.4.15 *On dit que $E\subseteq\bigcup_{q\in\omega}\ 2^q\times 2^q$ est un <u>test</u> si :*
(a) $\forall q\in\omega\ \exists!(s_q,t_q)\in E\cap(2^q\times 2^q)$.
(b) $\forall m,p\in\omega\ \forall u\in 2^{<\omega}\ \exists v\in 2^{<\omega}\ (s_p0uv,t_p1uv)\in E$ et $(|t_p1uv|-1)_0=m$.
(c) $\forall n>0\ \exists q<n\ \exists w\in 2^{<\omega}\ \ s_n=s_q0w$ et $t_n=t_q1w$.
Nous appellerons T l'arbre engendré par un test $E=\{(s_q,t_q)/q\in\omega\}$:

$$T:=\{(s,t)\in 2^{<\omega}\times 2^{<\omega}/s=t=\emptyset\ \textit{ ou }\ \exists q\in\omega\ \exists w\in 2^{<\omega}\ \ (s,t)=(s_q0w,t_q1w)\}.$$

L'existence d'un test est montrée dans [L10]. Plus précisément, on peut vérifier que E défini comme suit convient : on pose $s_0=t_0:=\emptyset$ et

$$\begin{array}{ll} s_{q+1} & :=s_{[(q)_1]_0}\ 0\ \psi([(q)_1]_1)\ 0^{q-[(q)_1]_0-|\psi([(q)_1]_1)|}, \\ t_{q+1} & :=t_{[(q)_1]_0}\ 1\ \psi([(q)_1]_1)\ 0^{q-[(q)_1]_0-|\psi([(q)_1]_1)|} \end{array}$$

(ψ est définie avant le théorème 1.3.16).

La clause d'unicité dans (a) et la condition (c) assurent que T est suffisamment petit, et aussi l'acyclicité. La clause d'existence dans (a) et la condition (b) assurent que T est suffisamment gros. Plus précisément, si X est un espace polonais et σ une topologie polonaise plus fine sur X, alors il existe un G_δ dense de X sur lequel les deux topologies coïncident. La première partie de la condition (b) assure la possibilité d'entrer dans le carré d'un G_δ dense de 2^ω. Les exemples du théorème 1.4.3.(b) sont construits en utilisant les exemples présents dans [Lo-SR1]. Des conditions sur les verticales apparaissent, et la seconde partie de la condition (b) donne un contrôle sur le choix des verticales. La proposition qui suit est montrée dans [L10] (voir 28) :

Proposition 1.4.16 *L'arbre engendré par un test est uniformément acyclique.*

Le lemme crucial pour montrer le théorème 1.4.3.(b) est le suivant (voir 30 dans [L10]). Pour l'énoncer, il nous faut des notations.

Notation. On définit $p\!:\!\omega^{<\omega}\!\setminus\!\{\emptyset\}\!\rightarrow\!\omega$. On définit en fait $p(s)$ par récurrence sur $|s|$:

$$p(s)\!:=\!\left\{\begin{array}{l} s(0) \text{ si } |s|\!=\!1,\\ <\!p(s\lceil(|s|\!-\!1)), s(|s|\!-\!1)\!> \text{ sinon.}\end{array}\right.$$

Lemme 1.4.17 *Soient G un G_δ dense de 2^ω, et T l'arbre engendré par un test. Alors il existe $\alpha_0\!\in\! G$ et $f\!:\!2^\omega\!\rightarrow\! G$ continue tels que, pour $\alpha\!\in\! 2^\omega$,*
(a) $(\alpha_0, f(\alpha))\!\in\!\lceil T\rceil$.
(b) Pour $t\!\in\!\omega^{<\omega}$ et $m\!\in\!\omega$,
(i) $\alpha(p(tm))\!=\!1 \ \Rightarrow\ \exists m'\!\in\!\omega\ \ (\alpha_0\Delta f(\alpha))(p(tm')\!+\!1)\!=\!1$.
(ii) $(\alpha_0\Delta f(\alpha))(p(tm)\!+\!1)\!=\!1 \ \Rightarrow\ \exists m'\!\in\!\omega\ \ \alpha(p(tm'))\!=\!1$.

Nous introduisons maintenant les exemples du théorème 1.4.3.(b) (voir [L10]) :

Notations. Dans le lemme 3.3 de [Lo-SR1], l'application $\rho_0 : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ définie comme suit est introduite :

$$\rho_0(\varepsilon)(i)\!:=\!\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \varepsilon(<\!i,j\!>)\!=\!0 \text{ pour tout } j\!\in\!\omega,\\ 0 \text{ sinon.}\end{array}\right.$$

Dans cet article, $\rho_0^\xi : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ est aussi définie pour $\xi<\omega_1$ comme suit, par récurrence sur ξ (voir la preuve du théorème 3.2). On pose :
- $\rho_0^0\!:=\!\mathrm{Id}_{2^\omega}$.
- $\rho_0^{\eta+1}\!:=\!\rho_0\circ\rho_0^\eta$.
- Si $\lambda>0$ est limite, fixons $(\xi_k^\lambda)\!\subseteq\!\lambda\!\setminus\!\{0\}$ telle que $\Sigma_k\ \xi_k^\lambda\!=\!\lambda$. Pour $\varepsilon\!\in\! 2^\omega$ et $k\!\in\!\omega$ on définit $(\varepsilon)^k\!\in\! 2^\omega$ par $(\varepsilon)^k(i)\!:=\!\varepsilon(i\!+\!k)$. On définit aussi $\rho_0^{(k,k+1)}\!:\!2^\omega\!\rightarrow\! 2^\omega$ par

$$\rho_0^{(k,k+1)}(\varepsilon)(i)\!:=\!\left\{\begin{array}{l} \varepsilon(i) \text{ si } i\!<\!k,\\ \rho_0^{\xi_k^\lambda}((\varepsilon)^k)(i\!-\!k) \text{ si } i\!\geq\! k.\end{array}\right.$$

On pose $\rho_0^{(0,k+1)}\!:=\!\rho_0^{(k,k+1)}\circ\rho_0^{(k-1,k)}\circ\ldots\circ\rho_0^{(0,1)}$ et $\rho_0^\lambda(\varepsilon)(k)\!:=\!\rho_0^{(0,k+1)}(\varepsilon)(k)$.

L'ensemble $H_{1+\xi}\!:=\!(\rho_0^\xi)^{-1}(\{0^\infty\})$ est aussi introduit, et les auteurs montrent que $H_{1+\xi}$ est $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}\!\setminus\!\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi}$ (voir le théorème 3.2).

• L'application $S\!:\!2^\omega\!\rightarrow\!2^\omega$ est le shift : $S(\alpha)(m)\!:=\!\alpha(m\!+\!1)$.
• Soit T l'arbre engendré par un test. On pose, pour $\xi\!<\!\omega_1$,

$$A_{1+\xi} := \{(\alpha,\beta)\!\in\!2^\omega\!\times\!2^\omega/(\alpha,\beta)\!\in\![T] \text{ et } S(\alpha\Delta\beta)\!\notin\!H_{1+\xi}\}.$$

Le résultat suivant (voir 31 dans [L10]) précise le théorème 1.4.3.(b) :

Théorème 1.4.18 *Soit $\xi\!<\!\omega_1$. L'ensemble $\lceil T\rceil\!\setminus\!A_{1+\xi}$ est $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(2^\omega\!\times\!2^\omega)\!\setminus\!pot(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\xi})$, et $A_{1+\xi}$ n'est pas pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.*

Synthèse effective.

Notations. Soient X,Y des espaces polonais récursivement présentés. On pose

$$B_0^{X\times Y}\!:=\!\{p\!\in\!W^{X\times Y}/\exists(m,n)\!\in\!W^X\!\times\!W^Y\ C_p^{X\times Y}\!=\!C_m^X\!\times\!C_n^Y\}.$$

Puis on définit un opérateur inductif Φ sur ω (voir [C]) comme suit :

$$\Phi(A)\!:=\!B_0^{X\times Y}\cup A\cup\{p\!\in\!W^{X\times Y}/\ \exists\alpha\!\in\!\Delta^1_1\ \forall n\!\in\!\omega\ \ \alpha(n)\!\in\!W^{X\times Y}\cap A\ \text{ et }\ \neg C_p^{X\times Y}\!=\!\bigcup_n\ C^{X\times Y}_{\alpha(n)}\}.$$

Φ est clairement un opérateur Π^1_1 monotone inductif. On pose $B_\xi^{X\times Y}\!=\!\Phi^\xi\!:=\!\Phi(\bigcup_{\eta<\xi}\ \Phi^\eta)$, pour tout ordinal ξ (ce qui est cohérent avec la définition de $B_0^{X\times Y}$).

On peut grouper les théorèmes 1.4.2, 1.4.7, 1.4.11 et 1.4.14 sous la forme suivante (voir [L10]) :

Théorème 1.4.19 *(Debs-Lecomte-Louveau) Soient T donné par le théorème 1.4.3, $\xi<\omega_1^{CK}$, $A_{1+\xi}$ donné par le théorème 1.4.3, et X,Y des espaces polonais récursivement présentés.*
• Soient A, B des Σ^1_1 disjoints de $X\!\times\!Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) L'ensemble A n'est pas séparable de B par un ensemble pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.
(b) L'ensemble A n'est pas séparable de B par un ensemble $\Delta^1_1\cap$ pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.
(c) L'ensemble A n'est pas séparable de B par un ensemble $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(\tau_1)$.
(d) $\overline{A}^{\tau_{1+\xi}}\cap B\!\neq\!\emptyset$.
(e) Il existe $u:2^\omega\rightarrow X$, $v:2^\omega\rightarrow Y$ continues telles que les inclusions $A_{1+\xi}\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$ et $\lceil T\rceil\!\setminus\!A_{1+\xi}\!\subseteq\!(u\!\times\!v)^{-1}(B)$ soient satisfaites.
• Les ensembles $W_0^{X\times Y}\!=\!B_0^{X\times Y}$, $W_{1+\xi}^{X\times Y}\!=\!B_{1+\xi}^{X\times Y}$ et $W_{<1+\xi}^{X\times Y}$ sont Π^1_1.

Comme nous l'avons vu avec le théorème 1.4.7, l'équivalence entre (a), (b) et (c) est montrée dans [Lo2]. Il est également essentiellement montré dans [Lo2] que (a), (b) et (c) sont équivalents à (d) (voir la preuve du théorème 2.8, (a) page 25). On peut en fait montrer le théorème 1.4.19 par récurrence sur ξ, en utilisant les théorèmes 1.4.11 et 1.4.14 (voir [L10]). On redémontre au passage le théorème 1.4.7. Une conséquence immédiate du théorème 1.4.19 est le résultat suivant, montré dans [Lo2] (voir le théorème 3.4) :

Corollaire 1.4.20 *(Louveau) Soient $\xi<\omega_1^{CK}$, X, Y des espaces polonais récursivement présentés, et A un Δ^1_1 de $X\!\times\!Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) L'ensemble A est pot$(\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi})$.
(b) L'ensemble A est $\mathbf{\Pi}^0_{1+\xi}(\tau_1)$.

1.5 Questions d'injectivité.

Comme nous l'avons vu avec les théorèmes 1.1.1 et 1.1.4, il est parfois possible d'avoir l'injectivité des fonctions de réduction en dimension un. C'est parfois aussi le cas en dimension deux, comme le montrent les théorèmes 1.2.3, 1.3.1, 1.3.5 (voir remarque (a) page 21 de [L8]), 1.3.9, 1.3.18 et 1.3.20, notamment lorsqu'il s'agit de plonger un contre-exemple typique. Dans cette section, nous allons nous demander si cette injectivité des fonctions de réduction est possible, dans différents résultats rencontrés jusque là (notamment le théorème 1.3.21, et les corollaires 1.3.22, 1.3.23, 1.4.4).

1.5.1 Résultats positifs.

Comme nous l'avons vu après le corollaire 1.3.23, une autre version de l'exemple A_1, défini avant le théorème 1.3.16, est considérée dans [L4]. Un résultat très analogue au théorème 1.3.18 y est essentiellement montré (voir le théorème 2.12 dans [L4]) :

Théorème 1.5.1.1 *Soit $(X,(f_n))$ une situation convergente. Alors il existe $u:2^\omega\to X$ continue et injective telle que $A_1=(u\times u)^{-1}(A^f)\cap\overline{A_1}$.*

Ceci se passe au niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$. Le niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$ est développé dans [L5], même si au départ on ne cherchait pas spécialement à obtenir des fonctions de réduction injectives. On va voir que ceci est possible dans le cas des boréliens à coupes dénombrables <u>dans les deux sens</u> (horizontalement et verticalement). Le point de départ était le résultat suivant (voir 2.11 dans [L3]) :

Théorème 1.5.1.2 *Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien de $X\times Y$ à coupes verticales dénombrables. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) L'ensemble A n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_2$).
(b) Il existe :
- Des espaces polonais parfaits de dimension 0 non vides Z et T,
- Une suite (g_m) de fonctions continues, ouvertes, de domaine ouvert dense de Z, et d'image dans T,
- Des fonctions $u:Z\to X$ et $v:T\to Y$ continues et injectives,
tels que pour z dans $\bigcap_m\ D_{g_m}$:
- L'ensemble $g[z]:=\{g_m(z)/m\in\omega\}$ soit sans point isolé.
- La différence $\overline{g[z]}\setminus g[z]$ soit homéomorphe à ω^ω.
- On ait l'égalité $g[z]=(u\times v)^{-1}(A)_z\cap\overline{g[z]}$.

Autrement dit, en chaque point du G_δ dense $\bigcap_n\ D_{g_m}$, on retrouve le test en dimension un pour les G_δ sur la coupe verticale. Ce résultat est un analogue en dimension deux du théorème 1.1.1. A ceci près que dans le théorème d'Hurewicz, on a un exemple-type P_f, et qu'ici on a seulement une situation-type. Le travail consistait donc à passer d'une situation-type à un exemple-type (on retrouvera ce phénomène au niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$ dans la section 1.6). Notons que la situation-type dépend de A, même si elle est toujours du même genre. Dans le résultat qu'on cherche à obtenir, l'exemple-type est indépendant de A. On cherche donc à obtenir un théorème d'interversion de quantificateurs, c'est-à-dire une version uniforme du théorème précédent. Il est un lemme de fond qui est au niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$ ce que le lemme 1.3.3 est au niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$ (voir 10 dans [L5], et aussi le théorème 1.5.1.2) :

Lemme 1.5.1.3 *Soient :*
- Z, T des espaces polonais non vides.
- (g_m) une suite de fonctions continues, ouvertes, de domaine ouvert dense de Z, et d'image dans T.
- $G(g)$ un G_δ dense de $\bigcap_{m\in\omega} D_{g_m}$ tel que $g[z]$ soit sans point isolé, pour z dans $G(g)$.
- Z' (resp. T') un G_δ dense de Z (resp. T).
Alors $\bigcup_m$ Gr$(g_m) \cap (Z' \times T')$ n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_2$).

Nous définissons maintenant précisément ce qu'on entend par version uniforme de l'exemple d'Hurewicz (voir [L5]). Ceci rentre dans le cadre du lemme précédent :

Définition 1.5.1.4 *On dira que $(Z, T, (g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ est une $\underline{situation\ générale}$ si :*
(a) Z et T sont des espaces polonais parfaits de dimension 0 non vides.
(b) $g_{m,p}$ est un homéomorphisme de domaine (resp. d'image) ouvert-fermé de Z (resp. T).
(c) Pour $m\in\omega$, $(D_{g_{m,p}})_{p\in\omega}$ est une suite de domaines deux à deux disjoints dont la réunion est dense dans Z. On note g_m la fonction obtenue par recollement des $g_{m,p}$, pour p entier.
(d) Il existe un G_δ dense $G(g)$ de $\bigcap_{m\in\omega} D_{g_m}$ tel que $g[z]$ soit sans point isolé, pour z dans $G(g)$.

L'idée est de chercher l'exemple-type sous la forme $\bigcup_{m\in\omega}$ Gr$(g_m\lceil G(g))$, à partir d'une situation générale $(Z, T, (g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$. Et aussi de montrer que dans chaque borélien A, non pot($\mathbf{\Pi}^0_2$) dont toutes les coupes sont dénombrables, on peut trouver, à un changement de topologie près, une telle réunion se réduisant à A. On va donc être amenés à "réduire une situation générale à une autre". Il se trouve que pour assurer l'existence d'une telle réduction, il faut des conditions supplémentaires, aussi bien au départ qu'à l'arrivée. D'où la définition suivante (voir [L5], et aussi la définition 1.3.17) :

Définition 1.5.1.5 *On dira que $(Z, T, (g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ est une $\underline{situation\ d'arrivée}$ si :*
(a) $(Z, T, (g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ est une situation générale.
(b) Le diamètre du domaine et de l'image de $g_{m,p}$ vaut au plus $2^{-I(m,p)}$, où $I:\omega^2\rightarrow\omega$ est injective.
(c) Pour $k\in\omega\setminus\{0\}$ et $v\in(\omega^2)^{2k}$, nous avons l'implication suivante :

$$[\forall i<2k-1\ v(i)\neq v(i+1)]\ \Rightarrow\ [\forall U\in\mathbf{\Delta}^0_1(Z)\setminus\{\emptyset\}\ \exists z\in U\ \ g^{-1}_{u(0)}g_{u(1)}\ldots g^{-1}_{u(2k-2)}g_{u(2k-1)}(z)\neq z].$$

Nous partons à la recherche, dans chaque borélien A, non pot($\mathbf{\Pi}^0_2$) dont toutes les coupes sont dénombrables, d'une réunion $\bigcup_{m\in\omega}$ Gr$(g_m\lceil G(g))$ se réduisant à A, où $(Z, T, (g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ est une situation d'arrivée. Pour ce faire, il se trouve qu'un résultat intermédiaire va être utilisé deux fois (à savoir le théorème 1.5.1.8 à venir). Pour l'énoncer, il faut une définition de plus (voir [L5]) :

Définition 1.5.1.6 *On dira que $(Z, T, (h_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2}, M)$ est un $\underline{système\ réducteur}$ si :*
(a) Z et T sont des espaces polonais parfaits de dimension 0 non vides.
(b) $h_{n,p}$ est un homéomorphisme de domaine (resp. d'image) ouvert-fermé de Z (resp. T), de diamètre au plus $2^{-I(n,p)}$, où $I:\omega^2\rightarrow\omega$ est injective.
(c) M est G_δ de $Z\times T$ de projection dense dans Z, et $M\cap(\bigcup_{(n,p)\in\omega^2}$ Gr$(h_{n,p}))=\emptyset$.
(d) Pour tout ouvert O de $Z\times T$ tel que $\Pi_Z[M\cap O]$ soit dense dans Z, $\Pi_Z[M\cap O]$ est comaigre dans Z.
(e) Si U et V sont ouverts-fermés et $M\cap(U\times V)\neq\emptyset$, Gr$(h_{n,p})\cap\overline{M}\cap(U\times V)$ est le graphe de la restriction de $h_{n,p}$ à un ouvert de U, et $\{(n,p)\in\omega^2/$Gr$(h_{n,p})\cap\overline{M}\cap(U\times V)\neq\emptyset\}$ est infini.

Avec le lemme 1.5.1.7 et le théorème 1.5.1.8 qui suivent, nous reprenons pour l'essentiel la preuve du théorème 1.5.1.2 ; seul le vocabulaire change. Le lemme 1.5.1.7 donne un procédé pour obtenir des systèmes réducteurs. Le lemme 1.5.1.10 à venir nous en fournira un autre.

Lemme 1.5.1.7 *Soient X, Y des espaces polonais, et A un borélien non pot($\mathbf{\Pi}^0_2$) de $X\times Y$ dont les coupes horizontales et verticales sont dénombrables. Alors il existe un système réducteur, disons $(Z,T,(h_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2},M)$, et $u\!:\!Z\to X$, $v\!:\!T\to Y$ continues et injectives tels que :*
(a) $\bigcup_{(n,p)\in\omega^2}$ Gr$(h_{n,p})\subseteq(u\times v)^{-1}(A)$.
(b) $M\subseteq(u\times v)^{-1}(\neg A)$.

A partir d'un système réducteur, on n'obtient pas tout de suite une situation d'arrivée, mais seulement une situation générale dans un premier temps :

Théorème 1.5.1.8 *Soit $(Z,T,(k_{q,p})_{(q,p)\in\omega^2},N)$ un système réducteur. Alors il existe une injection $\Phi\!:\!\omega^2\to\omega^2$ et des ouverts-fermés $D_{m,p}\subseteq D_{k_{\Phi(m,p)}}$ tels que si $g_{m,p}:=k_{\Phi(m,p)}|_{D_{m,p}}$,*
(a) $(Z,T,(g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ soit une situation générale.
(b) Pour z dans $G(g)$ et t dans $\overline{g[z]}\setminus g[z]$, (z,t) est dans N.

Si de plus $(Z,T,(k_{q,p})_{(q,p)\in\omega^2})$ est une situation d'arrivée, on peut avoir $(Z,T,(g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ d'arrivée et $G(g)\subseteq G(k)$.

Le théorème suivant permet d'obtenir une situation d'arrivée à partir d'une situation générale (voir 4 dans [L5]) :

Théorème 1.5.1.9 *Soit $(Z,T,(l_{r,p})_{(r,p)\in\omega^2})$ une situation générale. Alors il existe une situation d'arrivée $(Z,T,(k_{q,p})_{(q,p)\in\omega^2})$ telle que $G(k)\subseteq G(l)$, et pour z dans $G(k)$ on ait $k[z]\subseteq l[z]$.*

Il reste à pouvoir assurer la réduction de la situation d'arrivée au borélien dont nous sommes partis. Le lemme qui suit, couplé avec le théorème 1.5.1.8, va le permettre (voir 5 dans [L5]) :

Lemme 1.5.1.10 *Soient $(Z,T,(l_{r,p})_{(r,p)\in\omega^2})$ une situation générale, et $(Z,T,(k_{q,p})_{(q,p)\in\omega^2})$ une situation d'arrivée telles que pour tout z de $G(k)\cap G(l)$, $k[z]\subseteq l[z]$. Alors il existe un ensemble N, G_δ de $(Z\times T)\setminus(\bigcup_{r\in\omega}$ Gr$(l_r))$, tel que $(Z,T,(k_{q,p})_{(q,p)\in\omega^2},N)$ soit un système réducteur.*

Nous avons défini la notion de situation d'arrivée. Il nous faut maintenant également définir la notion de situation de départ pour énoncer le théorème où se fait réellement la réduction (voir [L5]) :

Définition 1.5.1.11 *On dira que $(F,(f_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2})$ est une $\underline{\text{situation de départ}}$ si :*
(a) $(F,F,(f_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2})$ est une situation générale.
(b) $F=\Pi_{i\in\omega}\ A_i\subseteq\omega^\omega$, où chaque $A_i\subseteq\omega$ est fini.
(c) Pour x dans D_{f_n}, on a $x<_{\text{lex}}f_n(x)$, et pour n, p entiers, il existe un entier $q(n,p)$ tel que si $q>q(n,p)$ et x est dans $D_{f_{n,p}}$, alors $f_{n,p}(x)(q)=x(q)$.
(d) Pour (x,y) dans $(\bigcap_{n\in\omega}\ D_{f_n}\times F)\cap\overline{\bigcup_{n\in\omega}\ \text{Gr}(f_n)}$, il existe (y_k) tendant vers y telle que (x,y_k) appartienne à $\bigcup_{n\in\omega}$ Gr(f_n) pour tout entier k, et $x\neq y$.

(e) On définit des relations sur $\bigcup_{p\in\omega}(\Pi_{i<p}\ A_i)$, n étant entier, par :

$$s\,\mathfrak{R}_n\,t \quad\Leftrightarrow\quad |s|=|t| \ \ \textit{et}\ \ (N_s\times N_t)\cap Gr(f_n)\neq\emptyset,$$

$$s\,\mathfrak{R}\,t \quad\Leftrightarrow\quad \exists n\in\omega\ \ s\,\mathfrak{R}_n\,t.$$

Si $s\,\mathfrak{R}\,t$, on pose $\psi(s,t):=min\ \{n\in\omega/s\,\mathfrak{R}_n\,t\}$. On demande :
(i) $[s\,\mathfrak{R}\,s\ \Rightarrow\ \psi(s,s)=0]$, et $[s^\frown j\,\mathfrak{R}\,t^\frown j\ \Rightarrow\ \psi(s^\frown j,t^\frown j)=\psi(s,t)]$.
(ii) Soit $s(\mathfrak{R})$ le symétrisé de $\mathfrak{R}$. Si $s,t\in\bigcup_{p\in\omega}(\Pi_{i<p}\ A_i)$ et $(s_i)_{i\leq n}$ est un $s(\mathfrak{R})$-chemin tel que $s_0=s$ et $s_n=t$, alors il existe un unique $s(\mathfrak{R})$-chemin $(t_j)_{j\leq m}$ sans répétition tel que $t_0=s$ et $t_m=t$.

Notons qu'une nouvelle fois, la condition (ii) d'acyclicité va permettre d'assurer la réduction.

Exemple. Soit (q_n) la suite des nombres premiers : $q_0=2$, $q_1=3$, $q_2=5,\ldots$ On définit $J:\omega^{<\omega}\rightarrow\omega$ injective par $J(s):=q_0^{s(0)+1}\ldots q_{|s|-1}^{s(|s|-1)+1}$ si $s\neq\emptyset$, 0 sinon.

- On définit $A_i:=\{1\}\cup\{J(u^\frown 1)/u\in\Pi_{p<i}\ A_p\}$, puis $F:=\Pi_{i\in\omega}\ A_i$.
- On pose, pour $(s,t)\in\bigcup_{n\in\omega}\ \omega^n\times\omega^{n+1}$,

$$D_{f_{s,t}}:=\{\alpha\in F/\forall j\leq|s|\ \ \alpha(J[s\lceil j^\frown t\lceil(j+1)])=1\ \ \text{et}\ \ \forall p<t(j)\ \ \alpha(J[s\lceil j^\frown t\lceil j^\frown p])\neq 1\}.$$

On définit ensuite les fonctions $f_{s,t}:D_{f_{s,t}}\rightarrow F$ par

$$f_{s,t}(\alpha)(q):=\begin{cases}\alpha(q)\ \ \text{si}\ \ \forall j\leq|s|\ \ q\neq J[s\lceil j^\frown t\lceil(j+1)],\\[2ex] J[\alpha\lceil(q+1)]\ \ \text{si}\ \ \exists j\leq|s|\ \ q=J[s\lceil j^\frown t\lceil(j+1)].\end{cases}$$

- Soient $e:\omega\longrightarrow\omega^{<\omega}$ bijective vérifiant $e^{-1}(s)<e^{-1}(s^\frown n)$, et $\Psi:\omega^2\rightarrow\bigcup_{n\in\omega}\ \omega^n\times\omega^{n+1}$ et $\theta:\bigcup_{n\in\omega}\ \omega^n\times\omega^{n+1}\rightarrow\omega^2$ bijectives réciproques l'une de l'autre avec $\Psi_0(n,p)=e(n)$ et aussi $\theta_0(s,t^\frown m)=e^{-1}(s)$. On pose $f_{n,p}:=f_{\Psi(n,p)}$. Alors $(F,(f_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2})$ est une situation de départ.
- L'ensemble $G(f)=\bigcap_{n\in\omega}D_{f_n}$ est G_δ dense de F, donc polonais parfait de dimension 0, et $G(f)$ est localement non compact car son complémentaire contient l'ensemble dense D des suites différentes de 1 à partir d'un certain rang. On peut donc trouver un homéomorphisme $\varphi_0:\omega^\omega\rightarrow G(f)$. On remarque que si $x\in G(f)$ et $n\in\omega$, $f_n(x)\notin D$, à cause de la condition (c). Soit donc $\psi_0:\omega^\omega\rightarrow F\setminus D$ un homéomorphisme. On pose

$$B_2:=(\varphi_0\times\psi_0)^{-1}(\bigcup_{n\in\omega}\ Gr[f_n\lceil G(f)]).$$

Nous énonçons maintenant le théorème de réduction (voir 1 dans [L5]) :

Théorème 1.5.1.12 *Soient $(F,(f_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2})$ une situation de départ et $(Z,T,(g_{m,p})_{(m,p)\in\omega^2})$ une situation d'arrivée. Alors il existe $u:F\rightarrow G(g)$, $v:F\rightarrow T$ continues et injectives telles que :*
(a) Pour $(x,y)\in\bigcup_{n\in\omega}\ Gr(f_n)$, $v(y)\in g[u(x)]$.
(b) Pour $(x,y)\in(\bigcap_{n\in\omega}\ D_{f_n}\times F)\cap\overline{\bigcup_{n\in\omega}\ Gr(f_n)}\setminus(\bigcup_{n\in\omega}\ Gr(f_n))$, $v(y)\in\overline{g[u(x)]}\setminus g[u(x)]$.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le résultat principal de [L5] :

Théorème 1.5.1.13 *Soient X, Y des espaces polonais, et A un borélien de $X\times Y$ à coupes horizontales et verticales dénombrables. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) Le borélien A est pot($\mathbf{\Pi}^0_2$).
(b) Il existe $u:\omega^\omega\rightarrow X$, $v:\omega^\omega\rightarrow Y$ continues et injectives telles que $B_2=(u\times v)^{-1}(A)\cap\overline{B_2}$.

Ce théorème est le résultat positif de réduction injective au niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$ annoncé précédemment.

1.5.2 Résultats négatifs.

Nous allons voir que le théorème précédent devient faux si on suppose seulement que A est à coupes verticales dénombrables. Mais commençons par étudier le niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$, qui est plus simple. En effet, le contre-exemple au niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$ est une version plus compliquée de celui du niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$, avec la même intuition de départ.

Contre-exemple au niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$.

Nous allons expliciter le contre-exemple utilisé pour montrer la limite suivante du corollaire 1.3.23 (voir 2.16 dans [L4]) :

Théorème 1.5.2.1 *Il n'est pas possible d'avoir u et v injectives dans le corollaire 1.3.23.*

L'intuition est la suivante : si on pouvait avoir u et v injectives, l'injectivité des fonctions intervenant dans la construction de A_1 (voir l'exemple avant le théorème 1.3.18) devrait se retrouver à l'arrivée. On devrait donc retrouver à l'arrivée des graphes de fonctions injectives. L'idée est donc toujours de trouver une réunion dénombrable de graphes s'accumulant sur la diagonale (pour assurer le côté non potentiellement fermé), mais cette fois-ci avec des graphes de fonctions hautement non injectives. Un exemple typique de fonction continue, ouverte et hautement non injective est la projection de 2^ω dans lui-même, obtenue en oubliant les coordonnées d'ordre impair, par exemple. Nous allons donc essentiellement construire des projections :

• Dans [L4], les fonctions suivantes $h_m:2^\omega\rightarrow 2^\omega$ sont définies :

$$h_m(\alpha)(k):=\left\{\begin{array}{l}\alpha(k)\ \text{ si }\ k\not\equiv -1\ (\text{mod } 2^{m+1}),\\ \alpha(2^{m+2}q-2^{m+1}-1)\ \text{ si }\ k=2^{m+1}q-1.\end{array}\right.$$

Le lemme 2.15 dans [L4] montre que (h_m) est une suite de surjections continues et ouvertes qui tend uniformément vers Id_{2^ω}. De plus, les h_m sont non injectives “les unes relativement aux autres” :

(1) $$h_m(h_n(\alpha))=h_m(\alpha)\ \text{ si }\ m<n\ \text{ et }\ \alpha\in 2^\omega.$$

• Avant le théorème 1.3.16, nous avons défini $(s_n)\subseteq 2^{<\omega}$ pour construire A_1. On pose :

$$D_m:=\{\ \alpha\in N_{s_m}\ /\ \forall m\leq l<2^{m+3}-2^{m+1}-1\ \ \alpha(l)=0\ \text{ et }\ \alpha(2^{m+3}-2^{m+1}-1)=1\ \}.$$

On pose ensuite $h'_m:=h_m|_{D_m}$, de sorte que

(2) h'_m est continue et ouverte de domaine et d'image ouverts-fermés.

Fixons $\alpha \in D_m$. Comme $s_m 0^{2^{m+2}-m} \prec \alpha$ et $s_m 0^{2^{m+2}-m-1} 1 \prec h'_m(\alpha)$, on a $\alpha <_{\text{lex}} h'_m(\alpha)$ et $D_m \cap h'_m[D_m] = \emptyset$. Soit A'_1 le symétrisé de $\bigcup_m \text{Gr}(h'_m)$, de sorte que A'_1 est irréflexive,

$$(3) \qquad A'_1 \text{ est un graphe, et}$$

$$(4) \qquad A'_1 \cap (D_m \times h'_m[D_m]) = \text{Gr}(h'_m).$$

De plus $\overline{A'_1} \setminus A'_1 \subseteq \Delta(2^\omega)$. Comme la fonction ψ utilisée pour définir (s_n) est bijective, on a

$$(5) \qquad \overline{A'_1} \setminus A'_1 = \Delta(2^\omega) \ \text{ et } \ A'_1 = \overline{A'_1} \setminus \Delta(2^\omega) \in D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)(2^\omega \times 2^\omega).$$

Ceci est le résumé des propriétés des h_m utilisées pour montrer le théorème 1.5.2.1, et également le théorème 1.5.2.2 à venir. La démonstration du théorème 1.5.2.1 est par l'absurde. Elle utilise également le théorème 1.5.1.1, appliqué à une situation convergente qui serait construite dans l'image d'un exemple typique par un produit d'injections continues. Ceci est utilisé pour montrer que si une réduction avec injectivité était possible, on pourrait prendre A_1 comme exemple typique. L'étape suivante de la preuve est de montrer qu'on pourrait avoir réduction avec injectivité de A_1 à $\bigcup_m \text{Gr}(h'_m)$. On conclut par un argument utilisant la propriété (1) contredisant la disjonction de D_m et $h'_m[D_m]$. Notons que le théorème 1.5.2.1 :

- Ne dit pas seulement que la réduction avec injectivité est impossible avec A_1 : aucun ensemble ne pourrait remplacer A_1 pour la rendre possible.

- Implique l'impossibilité d'avoir u et v injectives dans le corollaire 1.3.22.

Contre-exemple à une conjecture de Kechris, Solecki et Todorčević.

Dans [K-S-T], il est conjecturé que l'on peut avoir u injective dans la clause (b) du théorème 1.3.21. Ce n'est pas le cas (voir 10 dans [L8]) :

Théorème 1.5.2.2 *Il n'existe pas de graphe (X_0, R_0), avec X_0 polonais et $R_0 \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X_0^2)$, tel que pour tout graphe (X, A) du même type, exactement l'une des éventualités suivantes se produise :*
(a) $(X, A) \preceq_B (\omega, \neq)$.
(b) $(X_0, R_0) \preceq_{C,1-1} (X, A)$.

La preuve de ce résultat utilise les propriétés des h_m ci-dessus, un argument de catégorie de Baire, et de la théorie effective. La conclusion de cette preuve est très semblable à celle du théorème 1.5.2.1, avec l'argument utilisant la propriété (1). Notons que cette preuve montre un théorème similaire pour les relations irréflexives analytiques, en considérant les versions dissymétrisées $\bigcup_m \text{Gr}(h'_m)$ et A_1 de A'_1 et $s(A_1)$.

Contre-exemple au niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$.

Dans [L5] figure un exemple $(h_s)_{s \in (\omega \setminus \{0\})^{<\omega}}$ de suite de fonctions de 2^ω dans lui-même satisfaisant entre autres les hypothèses du lemme 1.5.1.3. L'exemple précis est le suivant. Rappelons qu'après la définition 1.5.1.11 nous avons défini une injection $J : \omega^{<\omega} \to \omega$. On pose :

$$h_s(\alpha)(k) := \begin{cases} \alpha(k) \ \text{ si } \ \forall 1 \leq i \leq |s| \ \ k \not\equiv -1 \ (\text{mod } \frac{J(s\lceil i)}{q_{i-1}}), \\ \\ \alpha(J(s\lceil i) q - \frac{J(s\lceil i)}{q_{i-1}} - 1) \ \text{ si } \ \begin{cases} i = \max\ \{1 \leq j \leq |s| / k \equiv -1 \ (\text{mod } \frac{J(s\lceil j)}{q_{j-1}})\} \ \text{ et} \\ k = \frac{J(s\lceil i)}{q_{i-1}} q - 1. \end{cases} \end{cases}$$

Comme pour le niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$, il s'agit de projections. Le lemme 11 de [L5] fournit $(l_s)_{s\in(\omega\setminus\{0\})^{<\omega}}$ de ce genre, en restreignant les domaines comme on l'avait fait pour le niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$. On pose

$$G_2:=\bigcap_{s\in(\omega\setminus\{0\})^{<\omega}} D_{l_s} \ \text{ et } \ A'_2:=\bigcup_{s\in(\omega\setminus\{0\})^{<\omega}} \mathrm{Gr}(l_s)\cap(G_0\times 2^\omega).$$

L'ensemble A'_2 n'est pas pot($\mathbf{\Pi}^0_2$) par le lemme 1.5.1.3. Le théorème qui suit est contenu dans la preuve du théorème 15 de [L5] :

Théorème 1.5.2.3 *Soit $(F,(f_{n,p})_{(n,p)\in\omega^2})$ la situation de départ située après la définition 1.5.1.11, et $G(f):=\bigcap_n D_{f_n}$. Alors on ne peut pas trouver $u:F\rightarrow G_2$ et $v:F\rightarrow 2^\omega$ continues et injectives telles que $\bigcup_{n\in\omega}$ Gr$(f_n)\subseteq(u\times v)^{-1}(A'_2)$ et*

$$\bigcup_{n\in\omega} Gr[f_n\lceil G(f)]=(u|_{G(f)}\times v)^{-1}(A'_2)\cap\overline{\bigcup_{n\in\omega} Gr[f_n\lceil G(f)]}.$$

Le corollaire qui suit est montré dans [L5] (voir 15) :

Corollaire 1.5.2.4 *(a) Le théorème 1.5.1.13 devient faux si on suppose seulement A à coupes verticales dénombrables.*
(b) Il n'est pas possible d'avoir u et v injectives dans le corollaire 1.4.4 quand $\xi=1$.

Nous terminons cette section sur les problèmes d'injectivité par une question :

Question. Nous avons vu qu'il n'est pas possible d'avoir l'injectivité des fonctions de réduction dans le corollaire 1.4.4, aux niveaux $\mathbf{\Pi}^0_1$ et $\mathbf{\Pi}^0_2$. Qu'en est-il aux niveaux $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ avec $\xi\geq 3$?

Pour y répondre, il faut de nouvelles idées, car les réunions dénombrables de graphes sont $\mathbf{\Sigma}^0_2$, et d'autre part la preuve au niveau $\mathbf{\Pi}^0_2$ est probablement trop compliquée pour être généralisée.

1.6 Ensembles minimaux parmi les boréliens à coupes dénombrables.

Le corollaire 1.3.23 (resp. le théorème 1.5.1.13) fournit un exemple à la Hurewicz pour le niveau $\mathbf{\Pi}^0_1$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_2$) en dimension deux, pour les boréliens à coupes dénombrables dans les deux sens. Par le théorème 1.2.6, les boréliens à coupes dénombrables sont pot($\mathbf{\Sigma}^0_2$). On a vu dans la section 1.1 que les seules classes de Wadge non stables par passage au complémentaire contenues dans $\mathbf{\Delta}^0_2$ sont les $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ et $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. On peut donc se demander s'il y a un analogue aux résultats 1.3.23 et 1.5.1.13 pour les classes $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ et $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. On va voir que oui.

Comme dans la section 1.5.1, nous partons d'une situation-type pour arriver à un exemple-type. Par exemple, un non-$D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ typique est obtenu comme suit. On prend un point x, puis une suite (x_n) convergeant vers x, puis pour tout n une suite $(x_{n,m})_m$ convergeant vers x_n. L'ensemble $\{x\}\cup\{x_{n,m}/n,m\in\omega\}$ n'est pas $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. L'idée est une nouvelle fois de remplacer les singletons par des graphes. Commençons par fixer quelques notations et une définition (voir [L4]) :

Notations. Dans toute la suite de cette section, ξ désignera un ordinal dénombrable pair (le cas impair étant analogue, nous ne le regarderons pas en détail).

• On définit $\Psi_\xi : \omega^{<\omega} \to \{-1\} \cup (\xi+1)$ comme suit. Soient $s \in \omega^{<\omega}$ et $n \in \omega$. On pose

$$\Psi_\xi(\emptyset) := \xi, \text{ et } \Psi_\xi(s^\frown n) := \begin{cases} -1 \text{ si } \Psi_\xi(s) \leq 0, \\ \\ \theta \text{ si } \Psi_\xi(s) = \theta+1, \\ \\ \text{un ordinal impair de } \Psi_\xi(s) \text{ tel que la suite } (\Psi_\xi(s^\frown n))_n \text{ soit cofina-} \\ \text{le dans } \Psi_\xi(s) \text{ et strictement croissante si } \Psi_\xi(s) \text{ est limite non nul.} \end{cases}$$

On définit alors des arbres : $T_\xi := \{s \in \omega^{<\omega} / \Psi_\xi(s) \neq -1\}$ et $T'_\xi := \{s \in T_\xi / \Psi_\xi(s) \neq 0\}$. Ces arbres sont bien fondés, et la hauteur de T_ξ (resp. T'_ξ) est $1+\xi$ (resp. ξ).

• Soient Z et T des ensembles, et $(f_s)_{s \in T_\xi}$ une suite de fonctions partielles, avec $D_{f_s} \times f_s[D_{f_s}] \subseteq Z \times T$ ou alors $D_{f_s} \times f_s[D_{f_s}] \subseteq T \times Z$. La notation $G(f_s)$ désignera le graphe Gr(f_s) de f_s si $D_{f_s} \subseteq Z$, et $\{(z,t) \in Z \times T / (t,z) \in \text{Gr}(f_s)\}$ si $D_{f_s} \subseteq T$. On a donc $G(f_s) \subseteq Z \times T$ dans les deux cas. On note

$$B_p := \bigcup_{s \in T_\xi, |s| \text{ paire}} G(f_s) \text{ et } B_i := \bigcup_{s \in T_\xi, |s| \text{ impaire}} G(f_s).$$

Définition 1.6.1 *On dit que $(Z, T, (f_s)_{s \in T_\xi})$ est une ξ-situation si :*
(a) Z et T sont des espaces polonais parfaits de dimension 0.
(b) Les f_s sont des fonctions continues et ouvertes de domaine ouvert-fermé non vide de Z et d'image ouverte-fermée de T, ou de domaine ouvert-fermé non vide de T et d'image ouverte-fermée de Z.
(c) $G(f_s) = \overline{\bigcup_n G(f_{s^\frown n})} \setminus [\bigcup_n G(f_{s^\frown n})]$ si $s \in T'_\xi$.
(d) $\overline{B_p} = B_p \cup_{\text{disj.}} B_i$.

Rappelons le résultat suivant (voir 2.3 dans [L3]) :

Théorème 1.6.2 *Soient X, Y des espaces polonais, et A un borélien pot$(\mathbf{\Delta}^0_3)$ de $X \times Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) Le borélien A n'est pas pot$(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$.
(b) Il existe une ξ-situation $(Z, T, (f_s)_{s \in T_\xi})$ et $u : Z \to X$, $v : T \to Y$ continues et injectives telles que $B_p = (u \times v)^{-1}(A) \cap \overline{B_p}$.

Nous introduisons maintenant les exemples explicites de [L4] :

Exemples. Nous utilisons à nouveau l'injection $J : \omega^{<\omega} \to \omega$ introduite après la définition 1.5.1.11.

• On pose ensuite

$$D_{f_s} := \{ \alpha \in \omega^\omega / \ \forall 1 \leq i \leq |s| \ \ \alpha[J(s \lceil i)] = 1 \},$$

$$f_s[D_{f_s}] = \left\{ \alpha \in \omega^\omega / \ \exists z \in \omega^{J(s)+1} \begin{cases} \forall 1 \leq i \leq |s| \ \ z[J(s \lceil i)] = 1 \text{ et} \\ \\ \forall p \leq J(s) \ \ \alpha(p) = \begin{cases} J[z \lceil (p+1)] \text{ si } \exists 1 \leq i \leq |s| \ \ p = J(s \lceil i), \\ \\ z(p) \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases} \right\}.$$

Nous définissons maintenant $f_s : D_{f_s} \to f_s[D_{f_s}]$ par

$$f_s(\alpha)(p) := \begin{cases} J[\alpha\lceil(p+1)] \text{ si } \exists 1 \leq i \leq |s| \ \ p = J(s\lceil i), \\ \\ \alpha(p) \text{ sinon.} \end{cases}$$

• Enfin, on pose $D_\xi := B_p$. Les propriétés importantes de $(\omega^\omega, (f_s)_{s \in T_\xi})$ sont les suivantes (voir la définition 3.1 et le théorème 3.3 de [L4]) :
(a) f_s est un homéomorphisme de domaine et d'image ouverts-fermés non vides de ω^ω, et les graphes des f_s sont deux à deux disjoints. De plus, $\alpha \leq_{\text{lex}} f_s(\alpha)$ si $\alpha \in D_{f_s}$.
(b) $\text{Gr}(f_s) = \overline{\bigcup_n \text{ Gr}(f_{s^\frown n})} \setminus [\bigcup_n \text{ Gr}(f_{s^\frown n})]$ si $s \in T'_\xi$, et $f_\emptyset = \text{Id}_{Z_0}$.
(c) $\overline{B_p} = B_p \cup B_i$. De plus, $\bigcup_{s \in T_\xi, |s| < m} \text{Gr}(f_s)$ est fermé dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$, pour tout entier m.

A ces propriétés s'ajoutent, une nouvelle fois, des propriétés d'acyclicité, pour assurer la construction de la réduction (voir 3.4 dans [L4]) :

Théorème 1.6.3 *Soit $(Z, T, (\tilde{f}_s)_{s \in T_\xi})$ une ξ-situation. Alors il existe $u : \omega^\omega \to Z$, $v : \omega^\omega \to T$ continues telles que $B_p = (u \times v)^{-1}(\tilde{B}_p) \cap \overline{B_p}$.*

Ce résultat est utilisé pour montrer le théorème suivant (voir 3.5 dans [L4]) :

Théorème 1.6.4 *Soient X, Y des espaces polonais, et A un borélien pot$(\mathbf{\Delta}^0_3)$ de $X \times Y$. Exactement l'une des éventualités suivantes se produit :*
(a) Le borélien A est pot$(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$.
(b) Il existe $u : 2^\omega \to X$, $v : 2^\omega \to Y$ continues telles que $D_\xi = (u \times v)^{-1}(A) \cap \overline{D_\xi}$.

On a un résultat analogue si ξ est impair avec la classe $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Le théorème 1.6.4 fournit une caractérisation des ensembles non pot$(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ pour ξ pair, et non pot$(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ pour ξ impair. Mais un simple passage au complémentaire nous fournit une caractérisation des ensembles non pot$(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ pour ξ pair, et non pot$(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ pour ξ impair (voir le théorème 3.6 de [L4]). En faisant la synthèse des résultats 1.4.4 et 1.6.4, on obtient le résultat complet pour les boréliens à coupes dénombrables suivant (voir 9 dans [L5]) :

Corollaire 1.6.5 *Soit Γ une classe de Wadge non stable par passage au complémentaire. Il existe un borélien A_Γ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, et un fermé F_Γ contenant A_Γ, tels que pour X, Y polonais, et pour A borélien de $X \times Y$ à coupes dénombrables, exactement l'une des éventualités suivantes se produise :*
(a) Le borélien A est pot(Γ).
(b) Il existe $u : \omega^\omega \to X$, $v : \omega^\omega \to Y$ continues telles que $A_\Gamma = (u \times v)^{-1}(A) \cap F_\Gamma$.

Il est à noter que A_Γ et F_Γ peuvent être donnés de manière explicite, et que A_Γ a ses coupes horizontales et verticales dénombrables si $\Gamma \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$, ce qui est le cas significatif. On a donc en particulier que $A_\Gamma \notin$ pot(Γ) si $\Gamma \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$. D'autre part, si Γ est auto-duale (c'est-à-dire si Γ est stable par passage au complémentaire), ne pas être dans Γ signifie ne pas être dans l'une des deux classes non auto-duales succédant à Γ dans l'ordre de Wadge. L'étude des classes de Wadge auto-duales peut donc être ramenée à celle des classes de Wadge non auto-duales.

Nous terminons cette partie consacrée aux boréliens du plan par des questions ouvertes :

Questions. (a) Les résultats 1.4.2, 1.4.3 et 1.4.4 fournissent un résultat complet pour les classes de Baire. Le corollaire 1.6.5 fournit un résultat complet pour les classes de Wadge dans le cas des boréliens à coupes dénombrables, et même en fait pot$(\mathbf{\Delta}^0_3)$. Cette limitation vient encore des anciennes techniques d'uniformisation partielle. On a vu avec les classes de Baire que cette limitation peut parfois être surmontée. La question qui se pose naturellement est alors celle de la généralisation des résultats 1.4.2, 1.4.3 et 1.4.4 aux classes de Wadge, sans la restriction sur le borélien A présente dans le corollaire 1.6.5. Ceci paraît maintenant très plausible.

(b) En cas de réponse positive, la question de l'injectivité des fonctions de réduction se poserait comme à la fin de la section 1.5.

(c) Nous avons fait une étude en dimension deux. On peut se demander si des résultats analogues peuvent être obtenus en dimension supérieure. Il semble que le plus difficile était de passer de la dimension un à la dimension deux. La généralisation du théorème 1.4.2 paraît vraisemblable. Celle du théorème 1.4.3 demandera d'avoir des idées pour remplacer la différence symétrique.

2 Fonctions de première classe.

Ce travail trouve son origine dans l'article [Da-E]. Le problème général est de retrouver toutes les valeurs d'une fonction, en ne connaissant ses valeurs que sur un petit ensemble, à l'aide d'un algorithme simple. Le cadre est celui des espaces métrisables séparables. Soient donc X, Y de tels espaces, et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Le petit ensemble est une suite dénombrable dense D de X (qui en général dépend de f). Les différents algorithmes en question consistent à déterminer, pour chaque point x de X, une sous-suite $(s_n[x,D])_n$ de D convergeant vers x. On dira que f est $\underline{retrouvable\ relativement\ \grave{a}\ D}$ si, pour chaque x, la suite $\big(f(s_n[x,D])\big)_n$ converge vers $f(x)$. La fonction f est dite $\underline{retrouvable}$ s'il existe une suite D telle que f soit retrouvable relativement à D. En particulier, les fonctions continues sont retrouvables relativement à toute suite D. Nous allons voir que les résultats dépendent de la façon dont on extrait la sous-suite $(s_n[x,D])_n$ de $D\!:=\!(x_p)$.

2.1 L'algorithme original d'extraction de sous-suites.

Fixons une distance compatible d sur X. L'algorithme dans [Da-E] est le suivant :

Définition 2.1.1 *(Darji-Evans) Soit x dans X. La suite $(s'_n[x,D])_{n\in\omega}$ est définie comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{ll} s'_0[x,D] & := \ x_0, \\ & \\ s'_{n+1}[x,D] := & \left\{\begin{array}{ll} s'_n[x,D] & \text{si } \ x=s'_n[x,D], \\ x_{\mathit{min}\{p\in\omega/d(x,x_p)<d(x,s'_n[x,D])\}} & \text{sinon.}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Le résultat suivant de 2.1.1-retrouvabilité est montré dans [Da-E] :

Théorème 2.1.2 *(Darji-Evans) (a) Si f est retrouvable, alors f est de première classe, c'est-à dire que $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)\subseteq\mathbf{\Sigma}^0_2$.*
(b) Réciproquement, si f est de première classe et X compact, alors f est retrouvable.

Nous pouvons étendre ce résultat. Pour ce faire, nous avons besoin de définitions (voir [L6], comme pour tous les résultats de la section 2) :

Définitions 2.1.3 *(a) On dira que l'espace métrique* (X,d) *est un* $\underline{espace\ ultram\acute{e}trique}$ *si pour tous* x,y,z *de* X*, on a* $d(x,y)\leq$ *max*$(d(x,z),d(y,z))$.
(b) On dira qu'un $\underline{espace\ ultram\acute{e}trique}$ (X,d) *est* $\underline{discret}$ *si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall (d_n)_{n\in\omega}\subseteq d[X\times X]\quad [(\forall n\in\omega\ \ d_{n+1}<d_n)\ \Rightarrow\ (lim_{n\to\infty}d_n=0)].$$

On peut montrer les extensions suivantes :

Théorème 2.1.4 *Supposons que* f *est de première classe. Alors* f *est retrouvable dans les cas où :*
(a) X *est réunion dénombrable de sous-espaces précompacts.*
(b) X *est un espace ultramétrique discret.*

L'existence sur X d'une distance compatible le rendant précompact a la conséquence suivante :

Corollaire 2.1.5 *Soit* X *un espace métrisable séparable. Alors il existe une distance compatible* d *sur* X *telle que, pour toute* $f:X\to Y$*, les conditions suivantes soient équivalentes :*
(a) f *est de première classe.*
(b) f *est retrouvable par rapport à* d.

Nous allons maintenant voir que cette notion de retrouvabilité est une notion métrique, et pas une notion topologique. Plus précisément, on va voir que l'hypothèse "X est discret" du théorème 2.1.4.(b) est utile.

Exemple. On pose $Z:=\{Q=(q_n)_{n\in\omega}\in\mathbb{Q}_+^\omega/\forall n\in\omega\ \ q_n<q_{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty}q_n=+\infty\}$. Cet espace est muni de $d:Z\times Z\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$d(Q,Q'):=\begin{cases} 2^{-\min(q_{\min\{n\in\omega/q_n\neq q'_n\}},q'_{\min\{n\in\omega/q_n\neq q'_n\}})} & \text{si } Q\neq Q',\\ 0 \text{ sinon.} & \end{cases}$$

On définit ensuite un fermé F de Z comme suit :

$$F:=\{Q\in Z/\forall n\in\omega\ \ n<q_n<n+1\}$$

Théorème 2.1.6 *(a) L'espace* (Z,d) *est un espace ultramétrique homéomorphe à* ω^ω.
(b) La fonction caractéristique χ_F *de* F *n'est pas retrouvable.*

Notons que ω^ω, muni de sa métrique usuelle, est un espace ultramétrique discret. L'équivalence entre "f est de première classe" et "f est retrouvable" dépend donc du choix de la distance. De plus, la notion de fonction de première classe est une notion topologique. Nous allons donc définir un nouvel algorithme, en termes topologiques.

2.2 Algorithme topologique.

Définition 2.2.1 *Soit X un espace topologique. On dit qu'une base (W_m) de la topologie de X est une* <u>*bonne base*</u> *si pour tout ouvert U de X, et pour tout point x de U, il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, $W_m \subseteq U$ si $x \in W_m$.*

En utilisant le plongement dans le cube $[0, 1]^\omega$ de Hilbert, on peut voir que tout espace métrisable séparable admet une bonne base. Dans la suite, (W_m) sera une bonne base de X.

Définition 2.2.2 *Soit x dans X. La suite $(s_n[x, D])_{n\in\omega}$ est définie comme suit :*

$$\begin{cases} s_0[x, D] \quad := x_0, \\ \\ s_{n+1}[x, D] := \begin{cases} s_n[x, D] \ \text{si} \ x = s_n[x, D], \\ x_{\min\{p\in\omega/\exists m\in\omega \ \{x,x_p\}\subseteq W_m\subseteq X\setminus\{s_0[x,D],\ldots,s_n[x,D]\}\}} \ \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Un des principaux résultats de [L6] est le suivant :

Théorème 2.2.3 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) f est de première classe.
(b) f est 2.2.2-retrouvable.

Pour prouver le sens (b) $\Rightarrow$ (a), on utilise le lemme suivant, qui est essentiellement identique à celui dans [Da-E]. Il est à noter que ce sens ne dépend pas vraiment de l'algorithme d'extraction de sous-suites.

Lemme 2.2.4 *Supposons que, pour $q \in \omega$, $\{x \in X/\exists n \in \omega \ s_n[x, D] = x_q\}$ soit ouvert dans X. Alors la retrouvabilité de f relativement à D implique que f est de première classe.*

La preuve du sens (a) $\Rightarrow$ (b) a des similarités avec celle de [F-V]. Les différences principales se situent au niveau du choix de la suite dense et de la façon de l'ordonner, qui doivent être valides dans tout espace métrisable séparable. Il est à noter que l'équivalence du théorème 2.2.3 ne dépend pas du choix de la bonne base, et est valide sans aucune restriction sur X. De plus, la définition 2.2.2 ne fait intervenir qu'un ensemble dénombrable d'ouverts de X, c'est-à-dire l'ensemble des W_m.

2.3 Etude de l'uniformité de la suite dense.

Il est naturel de se demander s'il existe une suite dense (x_p) de X telle que toute fonction de première classe de X dans Y soit retrouvable relativement à (x_p). La réponse est non quand X n'est pas dénombrable. En effet, si on choisit $x \in X\setminus\{x_p/p \in \omega\}$, la fonction caractéristique $\chi_{\{x\}}$ n'est pas retrouvable relativement à (x_p). On peut alors se demander si (x_p) existe pour un ensemble de fonctions de première classe.

Notation. $\mathfrak{B}_1(X, Y)$ désignera l'ensemble des fonctions de première classe de X dans Y, et sera muni de la topologie de la convergence simple.

Définition 2.3.1 *On dira que $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X, Y)$ est* <u>*uniformément retrouvable*</u> *s'il existe une suite dense (x_p) de X telle que toute fonction de A soit retrouvable relativement à (x_p).*

2.3.1 Conditions nécessaires d'uniforme retrouvabilité.

Proposition 2.3.1.1 *Si A est uniformément retrouvable et compact, alors A est métrisable.*

Exemple. Il y a des compacts séparables non métrisables dont tous les singletons sont G_δ. Par exemple, le "split interval" $A := \{f : [0,1] \rightarrow 2/f$ est croissante$\}$, vu comme sous-ensemble de $\mathfrak{B}_1([0,1],2)$, est l'un d'eux (voir [T]). Par la proposition 2.3.1.1, le "split interval" n'est pas uniformément retrouvable.

Notation. Si $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$, l'application $\phi : X \times A \rightarrow Y$ définie par $\phi(x,f) := f(x)$ a sa fonction partielle $\phi(x,.)$ (resp. $\phi(.,f)$) continue (resp. de première classe). Donc ϕ est de deuxième classe si A est métrisable séparable (voir page 378 dans [Ku]).

Proposition 2.3.1.2 *Si A est uniformément 2.2.2-retrouvable et Y de dimension 0, alors ϕ est de première classe.*

La preuve de cette proposition comporte des analogies avec celle du lemme 2.2.4.

Corollaire 2.3.1.3 *(a) Il existe $I : 2^\omega \rightarrow \mathfrak{B}_1(2^\omega,2)$ continue et injective telle que $I[2^\omega]$ ne soit pas uniformément 2.2.2-retrouvable, et en fait telle que $\phi \notin \mathfrak{B}_1(2^\omega \times I[2^\omega],2)$.*
(b) Il existe $A \subseteq \mathfrak{B}_1(2^\omega,2)$, $A \approx \omega^\omega$, non uniformément 2.2.2-retrouvable tel que $\phi \in \mathfrak{B}_1(2^\omega \times A,2)$.

Ce résultat est très négatif, puisqu'il montre l'existence d'un compact métrisable de fonctions de première classe qui n'est pas uniformément retrouvable. Il est en fait formé de fonctions caractéristiques de $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$: soit $\mathcal{S} := \{s \in 2^{<\omega}/s = \emptyset$ ou $[s \neq \emptyset$ et $s(|s|-1) = 1]\}$. On a

$$I(\alpha)(\beta) := \begin{cases} 1 \text{ si } \exists s \in \mathcal{S} \ \ [s \prec \alpha \text{ et } \beta = s0^\omega], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'exemple du (b) est obtenu en prenant $A := I[P_\infty]$, où P_∞ est le complémentaire de l'ensemble P_f défini dans le théorème 1.1.1.

2.3.2 Retrouvabilité et rangs ordinaux.

L'exemple précédent montre que la bornitude de la complexité des fonctions de A n'assure pas l'uniforme retrouvabilité de A. Notons que l'exemple du "split interval" est une autre manifestation de ceci, dans le cas où le compact n'est pas métrisable. Dans [Bo], l'auteur introduit un rang ordinal mesurant la complexité des fonctions numériques de première classe définies sur un compact métrisable. Rappelons cette définition, qui a du sens pour des fonctions définies sur un espace polonais X non nécessairement compact.

Définition 2.3.2.1 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des G_δ disjoints de X, et $R(\mathcal{A},\mathcal{B})$ l'ensemble des suites croissantes $(G_\alpha)_{\alpha \leq \beta}$ d'ouverts de X, avec $\beta < \omega_1$, satisfaisant :*
(a) $G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$ est disjoint de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$, si $\alpha < \beta$.
(b) $G_\gamma = \cup_{\alpha<\gamma}\, G_\alpha$ si $0 < \gamma \leq \beta$ est un ordinal limite.
(c) $G_0 = \emptyset$ et $G_\beta = X$.

On a $R(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \emptyset$. On pose $L(\mathcal{A},\mathcal{B}) := min\{\beta < \omega_1/\exists (G_\alpha)_{\alpha\leq\beta} \in R(\mathcal{A},\mathcal{B})\}$. Si $f \in \mathfrak{B}_1(X,\mathbb{R})$ et $a < b$ sont des réels, on pose $L(f,a,b) := L(\{f \leq a\},\{f \geq b\})$. Finalement,

$$L(f) := sup\{L(f,q_1,q_2)/q_1 < q_2 \in \mathbb{Q}\}.$$

Dans [Bo], l'auteur montre que si X est compact, $A \subseteq \mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ est relativement compact dans $\mathfrak{B}_1(X,\mathbb{R})$, et $a<b$ sont des réels, alors sup$\{L(f,a,b)/f \in \overline{A}^{c.s.}\} < \omega_1$. Il se demande si ce résultat reste vrai pour un compact séparable A de $\mathfrak{B}_1(X,\mathbb{R})$. Nous avons la réponse partielle suivante, qui est une conséquence du théorème 1.2.6 et du théorème de séparation des $\mathbf{\Pi}^0_2$:

Proposition 2.3.2.2 *Si X est un espace polonais, $Y \subseteq \mathbb{R}$, et $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$ est également polonais, alors sup$\{L(f)/f \in A\} < \omega_1$.*

Notons que depuis la question de J. Bourgain a été résolue positivement dans [A-Do-Ke]. On peut également poser la question du lien entre le fait que sup$\{L(f)/f \in A\} < \omega_1$ et la retrouvabilité uniforme de A. Si $A \in D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)(X)$, on a $\neg\mathcal{A} \in D_{\xi+1}(\mathbf{\Sigma}^0_1)(X)$ et $L(\neg\mathcal{A},\mathcal{A}) \leq \xi+2$. Le rang de la fonction caractéristique $\chi_\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ est au plus $\xi+2$. Dans le cas de l'exemple du corollaire 2.3.1.3 et du "split interval", on a

$$\text{sup}\{L(f)/f \in A\} \leq 4 < \omega_1.$$

Le fait que L soit borné sur A n'implique donc pas l'uniforme retrouvabilité de A, n'implique pas que ϕ soit de première classe, et n'implique pas que A soit métrisable. Cependant :

Corollaire 2.3.2.3 *Si X est un espace polonais, $Y \subseteq \mathbb{R}$, et $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$ est compact uniformément retrouvable, alors sup$\{L(f)/f \in A\} < \omega_1$.*

On peut se demander si ce résultat est vrai pour l'ensemble des fonctions retrouvables relativement à D. Ce n'est pas le cas, à cause de l'existence de $\mathbf{\Delta}^0_2(\mathbb{Q})$ arbitrairement compliqués :

Proposition 2.3.2.4 *Soient (x_p) une suite dense d'un espace polonais parfait non vide X, et $Y := 2$. Alors sup$\{L(f)/f$ retrouvable relativement à $(x_p)\} = \omega_1$.*

Remarque. D'autres rangs sur les fonctions de première classe sont étudiés dans [K-Lo]. Le rang L est essentiellement le rang de séparation défini dans cet article. Si X est un compact métrisable, et si les fonctions de première classe considérées sont bornées, les propositions 2.3.2.2, 2.3.2.4, et le corollaire 2.3.2.3 restent vrais pour ces autres rangs.

2.3.3 Conditions suffisantes d'uniforme retrouvabilité.

Théorème 2.3.3.1 *Si Y est un espace métrique, et si A, muni de la topologie de la convergence compacte, est un sous-espace séparable de $\mathfrak{B}_1(X,Y)$, alors A est uniformément 2.2.2-retrouvable.*

Le corollaire suivant est montré dans [F-V] quand $X = \mathbb{R}$, avec un autre algorithme d'extraction :

Corollaire 2.3.3.2 *Soit $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$ dénombrable. Alors A est uniformément 2.2.2-retrouvable.*

Proposition 2.3.3.3 *Soient (Y_p) une base de la topologie de Y, et :*
(a) Pour tout p entier, $\phi^{-1}(Y_p) \in (\mathbf{\Pi}^0_1(X) \times \mathcal{P}(A))_\sigma$.
(b) Il existe topologie métrisable séparable plus fine sur X, faite de $\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$, et rendant les fonctions de A continues.
(c) A est uniformément 2.2.2-retrouvable.
Alors $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

Si X est un borélien standard et A un espace polonais, alors les conditions (a) et (b) sont équivalentes à "Pour tout p entier, $\phi^{-1}(Y_p) \in (\mathbf{\Pi}^0_1(X) \times \mathbf{\Delta}^1_1(A))_\sigma$".

Proposition 2.3.3.4 *Si A a une base dénombrable, il existe une topologie métrisable séparable plus fine sur X rendant les fonctions de A continues. Si de plus X est polonais, on peut avoir cette topologie polonaise.*

Le problème est donc de trouver la topologie faite de $\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$. Nous avons vu que ce n'est pas le cas en général. En regardant les propositions 2.3.1.2 et 2.3.3.3, on peut se demander si les conditions de la proposition 2.3.3.3 et le fait que ϕ soit de première classe sont équivalents, notamment dans le cas où Y est de dimension 0. Cette question conduit à l'étude des boréliens de $2^\omega \times 2^\omega$. La réponse est non en général. D'abord, à cause du corollaire 2.3.1.3. Il montre que le fait que ϕ soit de première classe n'implique pas l'uniforme retrouvabilité (avec A polonais, en fait homéomorphe à ω^ω). De plus, soit $A := \{f \in \mathfrak{B}_1(2^\omega, 2)/f$ est retrouvable relativement à $(x_p)\}$, où $(x_p) := P_f$ est dense dans 2^ω. A est uniformément retrouvable mais il n'existe pas de topologie métrisable séparable plus fine τ sur 2^ω, faite de $\mathbf{\Sigma}^0_2(2^\omega)$, et rendant continues les fonctions de A. Mais A n'a pas de base dénombrable. Ceci conduit à supposer que A est K_σ et métrisable, pour espérer une telle équivalence.

Si ϕ est de première classe, $\phi^{-1}(Y_p)$ est $\mathbf{\Sigma}^0_2(X \times A)$ à coupes verticales ouvertes. Il est donc naturel de se demander si toute partie $\mathbf{\Sigma}^0_2(X \times A)$ à coupes verticales ouvertes est dans $(\mathbf{\Pi}^0_1(X) \times \mathcal{P}(A))_\sigma$. La réponse est non, même si on suppose que X et A sont des compact métrisables :

Proposition 2.3.3.5 *Il existe un sous-ensemble $\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ de $2^\omega \times 2^\omega$ à coupes verticales $\mathbf{\Delta}^0_1(2^\omega)$ qui n'est pas dans $(\mathbf{\Pi}^0_1(2^\omega) \times \mathcal{P}(2^\omega))_\sigma$.*

Avec les notations suivant le corollaire 2.3.1.3, un exemple de tel ensemble est le suivant :

$$E := (P_\infty \times 2^\omega) \cup \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \{s0^\omega\} \times [(\neg N_s) \cup N_{s0}].$$

Ce résultat peut être précisé :

Proposition 2.3.3.6 *Il existe un compact métrisable uniformément 2.2.2-retrouvable $A \subseteq \mathfrak{B}_1(2^\omega, 2)$, mais pour lequel il n'existe pas de topologie métrisable séparable plus fine sur 2^ω, faite de $\mathbf{\Sigma}^0_2(2^\omega)$, rendant continues les fonctions de A.*

Soit $J : 2^\omega \to \mathfrak{B}_1(2^\omega, 2)$ définie comme suit :

$$J(\alpha)(\beta) := \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } \exists s \in \mathcal{S} \ [s1 \prec \alpha \ \text{ et } \ \beta = s0^\omega], \\ 1 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

Alors J est continue, injective, et $A := J[2^\omega]$ satisfait les conditions de la proposition 2.3.3.6. Nous allons maintenant voir quelques résultats positifs pour les toutes premières classes de Wadge. Nous savons (voir le théorème 1.2.6) que si X et A sont polonais, tout borélien de $X \times A$ à coupes verticales ouvertes est dans $(\mathbf{\Delta}^1_1(X) \times \mathbf{\Sigma}^0_1(A))_\sigma$.

Proposition 2.3.3.7 *Si A a une base dénombrable, tout $\mathbf{\Pi}^0_1(X \times A)$ à coupes verticales ouvertes est $(\mathbf{\Pi}^0_1(X) \times \mathbf{\Sigma}^0_1(A))_\sigma$. Si de plus A est de dimension 0, tout $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)(X \times A)$ à coupes verticales ouvertes est $(\mathbf{\Pi}^0_1(X) \times \mathbf{\Delta}^0_1(A))_\sigma$.*

Comme pour le théorème 1.3.2, le niveau $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ est le niveau critique, comme le montre l'exemple de la proposition 2.3.3.5.

Nous allons maintenant voir que l'exemple du corollaire 2.3.1.3 est en un sens optimal. Rappelons que le début de la hiérarchie de Wadge est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \{\emptyset\} & & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1) & & \mathbf{\Sigma}^0_2 \\ & \mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_1 \oplus \mathbf{\Pi}^0_1 & & \ldots & & \ldots \\ \check{\{\emptyset\}} & & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1) & & \mathbf{\Pi}^0_2 \end{array}$$

La classe $\mathbf{\Sigma}^0_1 \oplus \mathbf{\Pi}^0_1$ est définie comme suit :

$$\mathbf{\Sigma}^0_1 \oplus \mathbf{\Pi}^0_1 := \{(U \cap O) \cup (F \setminus O) / U \in \mathbf{\Sigma}^0_1, F \in \mathbf{\Pi}^0_1, O \in \mathbf{\Delta}^0_1\}$$

Proposition 2.3.3.8 *Soient A un compact métrisable, $B \subseteq X \times A$ à coupes verticales (resp. horizontales) $\mathbf{\Delta}^0_1$ (resp. $\mathbf{\Sigma}^0_1 \oplus \mathbf{\Pi}^0_1$). Alors $B \in (\mathbf{\Pi}^0_1(X) \times \mathcal{P}(A))_\sigma$. En particulier, si $Y = 2$ et A est formé de fonctions caractéristiques de $\mathbf{\Sigma}^0_1 \oplus \mathbf{\Pi}^0_1$, alors les conditions de la proposition 2.3.3.3 sont satisfaites et ϕ est de première classe.*

2.3.4 Le cas des espaces de Banach.

Nous avons vu que le corollaire 2.3.1.3 est très négatif quant au comportement collectif des fonctions de première classe. Il est cependant un cadre où l'on peut obtenir un résultat nettement plus positif : celui des espaces de Banach. Soient E un espace de Banach, $X := [B_{E^*}, w^*]$, $Y := \mathbb{R}$ et $A := \{G|_X / G \in B_{E^{**}}\}$. Si E est séparable, X est un compact métrisable. Si de plus E ne contient pas de copie de l_1, le théorème de Odell et Rosenthal fournit, pour chaque $G \in E^{**}$, une suite (e_p) de E telle que $f(e_p) \to G(f)$ pour $f \in E^*$ (voir [O-R]). Soit $i : E \to E^{**}$ l'application canonique, et $G_p := i(e_p)$. Alors (G_p) converge simplement vers G. Par définition de la topologie préfaible, nous avons $i(e)|_X \in \mathfrak{C}(X, Y)$ pour $e \in E$, donc $G|_X$ est la limite simple d'une suite de fonctions continues. Par conséquent, $G|_X \in \mathfrak{B}_1(X, Y)$ (voir page 386 dans [Ku]) et $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X, Y)$.

Si E^{**} est séparable, alors E^* aussi et A est uniformément 2.2.2-retrouvable, par le théorème 2.3.3.1. Mais nous avons un meilleur résultat :

Théorème 2.3.4.1 *Soient E un espace de Banach, $X := [B_{E^*}, w^*]$, $Y := \mathbb{R}$ et $A := \{G|_X / G \in B_{E^{**}}\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) E^* est séparable.
(b) A est métrisable.
(c) Tout singleton de A est G_δ.
(d) A est uniformément retrouvable.

Ce théorème est une conséquence de la proposition 2.3.3.3. On obtient donc une caractérisation de la séparabilité du dual d'un espace de Banach arbitraire.

Remarques. (a) Notons que l'équivalence entre la métrisabilité du compact et le fait que chacun de ses singletons soit G_δ n'est pas vraie pour un compact arbitraire de fonctions de première classe (à cause du "split interval").

(b) Cet exemple des espaces de Banach montre aussi que la réciproque du théorème 2.3.3.1 est fausse. En effet, soient $X := [B_{l_1}, \sigma(l_1, c_0)]$, $Y := \mathbb{R}$ et $A := \{G|_X / G \in B_{l_\infty}\}$. Alors A est uniformément retrouvable, mais A n'est pas séparable pour la topologie de la convergence compacte. Notons que ceci donne un exemple de compact métrisable pour la topologie de la convergence simple qui n'est pas séparable pour la topologie de la convergence compacte.

(c) Finalement, notons que l'application ϕ est de première classe si E^* est séparable.

2.3.5 Notion d'ensemble de fonctions équi-première classe.

Nous donnons une caractérisation des fonctions de première classe améliorant légèrement, dans le sens (a) $\Rightarrow$ (b) du corollaire 2.3.5.3 à venir, celle que l'on peut trouver dans [Le-Ta-Z].

Définition 2.3.5.1 *Soient X, Y des espaces métriques, et $A \subseteq Y^X$. A est dit* $\underline{équi\!-\!première\ classe}$ *(ce qu'on note EPC) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) \in \mathfrak{B}_1(X, \mathbb{R}_+^*)$ telle que*

$$d_X(x, x') < min(\delta(\epsilon)(x), \delta(\epsilon)(x')) \;\;\Rightarrow\;\; \forall f \in A \;\; d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Proposition 2.3.5.2 *Soient X, Y des espaces métriques, et $A \subseteq Y^X$. Supposons que X est séparable, et que tous les fermés de X sont des espaces de Baire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) A est EPC.
(b) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $(G_m^\epsilon)_m \subseteq \mathbf{\Pi}_1^0(X)$, de réunion X, telle que pour toute $f \in A$ et pour tout entier m, diam$(f[G_m^\epsilon]) < \epsilon$.
(c) Il existe une topologie métrisable séparable plus fine sur X, formée de $\mathbf{\Sigma}_2^0(X)$, rendant A équicontinu.
(d) Tout fermé non vide F de X contient un point x tel que $\{f|_F / f \in A\}$ soit équicontinu en x.

Corollaire 2.3.5.3 *Soient X, Y des espaces métriques, et*
(a) f est de première classe.
(b) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon) \in \mathfrak{B}_1(X, \mathbb{R}_+^*) \;\;\; d_X(x, x') < min(\delta(\epsilon)(x), \delta(\epsilon)(x')) \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Si Y est séparable, alors (a) implique (b). Si X est séparable et si tout fermé de X est un espace de Baire, alors (b) implique (a).

Remarque. Soient X un espace polonais, $Y \subseteq \mathbb{R}$, et $A \subseteq Y^X$ un espace polonais. Supposons que tout fermé non vide F de X contienne un point d'équicontinuité de $\{f|_F / f \in A\}$. Par la proposition 2.3.5.2, $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X, Y)$, et par la proposition 2.3.2.2, le rang de J. Bourgain est borné sur A. Ceci est vrai dans un contexte plus général :

Corollaire 2.3.5.4 *Soient X un espace métrisable séparable, $Y \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq Y^X$ et $a < b$ des réels. Supposons que tout fermé non vide F de X contienne un point d'équicontinuité de $\{f|_F / f \in A\}$. Alors sup$\{L(f, a, b) / f \in A\} < \omega_1$. En particulier, sup$\{L(f) / f \in A\} < \omega_1$.*

Pour terminer, nous allons étudier les analogues des théorèmes d'Ascoli pour les fonction de première classe. Le premier de ces trois théorèmes s'adapte :

Proposition 2.3.5.5 *Si A est EPC, alors $\overline{A}^{c.s.}$ est EPC.*

Le troisième théorème d'Ascoli s'adapte dans un sens, en utilisant la paracompacité de X :

Proposition 2.3.5.6 *Soient X, Y des espaces métriques séparables, X étant localement compact. Supposons que $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$, muni de la topologie de la convergence compacte, est relativement compact dans Y^X. Alors A est EPC, et $A(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$.*

Exemple. Le deuxième théorème d'Ascoli ne s'adapte pas, dans le sens où il existe des espaces métriques X, Y, X étant compact, et un compact métrisable $A \subseteq [\mathfrak{B}_1(X,Y), c.s.]$ qui est EPC tel que sur A, la topologie de la convergence compacte et celle de la convergence simple soient différentes. En effet, on pose $X := [B_{l_1}, \sigma(l_1, c_0)]$, $Y := \mathbb{R}$ et $A := \{G|_X / G \in B_{l_\infty}\}$. De plus, $A(x)$ est compact pour tout $x \in X$ et A est fermé dans $[\mathbb{R}^X, c.c.]$. Comme A est métrisable non séparable dans cet espace, il n'est pas relativement compact. Il suit que la réciproque de la proposition 2.3.5.6 est fausse en général.

Corollaire 2.3.5.7 *Soient X, Y des espaces métriques séparables, X étant localement compact. Supposons que $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$, muni de la topologie de la convergence compacte, est relativement compact dans Y^X. Alors A est uniformément 2.2.2-retrouvable.*

Remarque. Soient X, Y des espaces métriques séparables, et $A \subseteq Y^X$. Supposons que tout fermé de X soit de Baire. Si A est EPC, $A \subseteq \mathfrak{B}_1(X,Y)$ et les conditions de la proposition 2.3.3.3 sont satisfaites, par la proposition 2.3.5.2. On peut montrer que la réciproque de ceci est fausse. Le contre-exemple montre aussi l'utilité de l'hypothèse de compacité relative dans la proposition 2.3.5.6.

3 Omega-puissances.

Ce travail son origine dans l'informatique théorique, et particulièrement dans la thèse de P. Simonnet (voir [Si]). On considère un alphabet fini sous la forme d'un entier $n = \{0, \ldots, n-1\} \geq 2$, et un dictionnaire sur cet alphabet, c'est-à-dire un sous-ensemble A de l'ensemble $n^{<\omega}$ des mots finis dont les lettres sont dans n.

Définition 3.1 *L'$\underline{\omega-puissance}$ associée à A est l'ensemble A^∞ des phrases infinies constructibles avec A par concaténation. On a donc $A^\infty := \{a_0 a_1 \ldots \in n^\omega / \forall i \in \omega \ a_i \in A\}$.*

Les ω-puissances jouent un rôle crucial dans la caractérisation des sous-ensembles de n^ω acceptés par les automates finis (voir le théorème 2.2 dans [St1]). Nous allons étudier ces objets du point de vue descriptif. Nous examinons les questions suivantes :

(a) Quels sont les niveaux de complexité topologique possibles pour les ω-puissances ? Cette question a été posée par P. Simonnet dans sa thèse, et étudiée dans [St2]. O. Finkel (dans [Fi2]) et A. Louveau ont montré indépendamment l'existence d'ω-puissances $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complètes. O. Finkel a montré dans [Fi1] l'existence d'ω-puissances $\mathbf{\Pi}^0_m$-complètes, pour tout entier $m \geq 1$.

(b) Quelle est la complexité topologique de l'ensemble des dictionnaires dont l'ω-puissance associée est d'un niveau de complexité donné ? Cette question se pose naturellement en regardant les caractérisations des ω-puissances $\mathbf{\Pi}^0_1$, $\mathbf{\Pi}^0_2$ et $\mathbf{\Sigma}^0_1$ obtenues dans [St2] (voir le corollaire 14 et les lemmes 25, 26).

(c) Une ω-puissance est toujours analytique dans n^ω (et même compacte si le dictionnaire est fini). Quelle est la complexité topologique de l'ensemble des codes d'analytiques étant des ω-puissances ? Cette question a été posée par A. Louveau. Elle fait aussi sens pour l'ensemble des codes de $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\xi$) étant des ω-puissances. Et aussi pour l'ensemble des codes de boréliens étant des ω-puissances.

3.1 Rangs ordinaux et ω-puissances.

L'analyticité des ω-puissances implique l'existence d'un rang co-analytique sur le complémentaire de A^∞. Nous allons en considérer un naturel, défini comme suit. On pose $A^- := A\setminus\{\emptyset\}$, pour $A \subseteq n^{<\omega}$. Si $S\in(n^{<\omega})^{<\omega}$, on pose $S^* := S(0)\ldots S(|S|-1)$. On pose ensuite, pour $\alpha\in n^\omega$,

$$T_A(\alpha) := \{S\in(A^-)^{<\omega}/S^*\prec\alpha\}.$$

On essaie donc de débuter α par des mots non vides de A, tant que c'est possible. $T_A(\alpha)$ est un arbre sur A^-, qui est bien fondé si et seulement si $\alpha\notin A^\infty$. La hauteur de cet arbre est le rang annoncé $R_A : \neg A^\infty\rightarrow\omega_1$. On pose ensuite

$$R(A) := \sup\{R_A(\alpha)/\alpha\notin A^\infty\}.$$

Par le théorème de la borne, A^∞ est borélien si et seulement si $R(A)<\omega_1$. On peut alors se demander quel est le lien entre la complexité de A^∞ et l'ordinal $R(A)$, quand A^∞ est borélien. La connaissance de $R(A)$ donne une borne supérieure de la complexité de A^∞ (voir [L7], comme pour tous les résultats de la section 3) :

Proposition 3.1.1 *Si $\xi<\omega_1$, $r\in\omega$ et $R(A)=\omega.\xi+r$, alors $A^\infty\in\mathbf{\Sigma}^0_{2.\xi+1}$.*

Ce résultat est optimal pour $\xi=0$. Se pose alors la question de la réciproque : la connaissance de la complexité de A^∞ nous informe-t-elle sur $R(A)$? Voici un début de réponse :

Proposition 3.1.2 *(a) $A^\infty=n^\omega$ exactement quand $R(A)=0$.*
(b) Si $A^\infty=\emptyset$, alors $R(A)=1$.
(c) Si $A^\infty\in\mathbf{\Delta}^0_1$, alors $R(A)<\omega$, et il existe $A_p\subseteq 2^{<\omega}$ tel que $A_p^\infty\in\mathbf{\Delta}^0_1$ et $R(A_p)=p$ si $p\in\omega$.
(d) Si $A^\infty\in\mathbf{\Pi}^0_1$, alors $R(A)\leq\omega$ et $[A^\infty\notin\mathbf{\Sigma}^0_1\Leftrightarrow R(A)=\omega]$.

Se pose ensuite la question des ω-puissances ouvertes. Avant cela, revenons sur les ω-puissances $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complètes :

Théorème 3.1.3 *L'ensemble $I := \{(\alpha, A)\in n^\omega\times 2^{n^{<\omega}}/\alpha\in A^\infty\}$ est $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complet. En fait,*
(a) (Finkel-Louveau) Il existe $A_0\subseteq 2^{<\omega}$ tel que A_0^∞ soit $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complète.
(b) Il existe $\alpha_0\in 2^\omega$ tel que I_{α_0} soit $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complet.

En fait, $\alpha_0 := 1010^2 10^3\ldots$ convient. La preuve montre en fait que si $\alpha=s_0s_1\ldots$ et (s_i) est une antichaîne pour l'extension, alors I_α est $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complet (ici $s_i=10^{2i+1}10^{2i+2}$). Par conséquent, I_α est $\mathbf{\Sigma}^1_1$-complet pour un ensemble dense de α.

Dans la preuve du (b), nous réduisons l'ensemble des arbres mal fondés sur ω à I_{α_0}. Décrivons la fonction de réduction, qui sera essentiellement reprise dans la suite. Soit (q_m) la suite des nombres premiers, $M:\omega^{<\omega}\rightarrow\omega$ définie par $M_s:=q_0^{s(0)+1}\dots q_{|s|-1}^{s(|s|-1)+1}+1$, $\phi:\omega^{<\omega}\rightarrow 2^{<\omega}\setminus\{\emptyset\}$ définie par $\phi(\emptyset):=1010^2=1010^{2M_\emptyset}$ et $\phi(sm):=10^{2M_s+1}10^{2M_s+2}\dots 10^{2M_{sm}}$, et $\Phi:2^{\omega^{<\omega}}\rightarrow 2^{n^{<\omega}}$ définie par $\Phi(T):=\phi[T]$. La fonction de réduction est la restriction de Φ à l'ensemble des arbres sur ω. Nous obtenons des ensembles co-analytiques vrais apportant des éléments de réponse à la question (b) :

Théorème 3.1.4 *Les ensembles suivants sont co-analytiques vrais :*
(a) $\Delta:=\{A\in 2^{n^{<\omega}}/A^\infty\in\Delta^1_1(A)\}$.
(b) $\Sigma_\xi:=\{A\in 2^{n^{<\omega}}/A^\infty\in\mathbf{\Sigma}^0_\xi\cap\Delta^1_1(A)\}$*, pour* $1\leq\xi<\omega_1$.
(c) $\Pi_\xi:=\{A\in 2^{n^{<\omega}}/A^\infty\in\mathbf{\Pi}^0_\xi\cap\Delta^1_1(A)\}$*, pour* $2\leq\xi<\omega_1$.

On réduit en fait l'ensemble des arbres bien fondés à $\Sigma_\xi\setminus I_{\alpha_0}$ si $\xi\geq 1$, et à $\Pi_\xi\setminus I_{\alpha_0}$ si $\xi\geq 2$. La fonction de réduction Φ' est une variante de Φ. On pose

$$t\subseteq\alpha_0\ \Leftrightarrow\ \exists k\in\omega\ \ t\prec\alpha_0-\alpha_0\lceil k:=<\alpha_0(k),\alpha_0(k+1),\dots>,$$
$$E:=\{(\alpha_0\lceil p)r/p\in\omega\setminus\{2\},r\in n\setminus\{\alpha_0(p)\}\},\ \ F:=\{S^*\not\subseteq\alpha_0/S\in\phi[T]^{<\omega}\},$$
$$\Phi'(T):=\phi[T]\cup\{s\in n^{<\omega}/\exists t\in E\cup F\ \ t\prec s\}.$$

On montre au passage que $(\Phi'(T))^\infty\in\mathbf{\Sigma}^0_1\cap\Delta^1_1(\Phi'(T))$ si T est bien fondé. On en déduit ceci :

Proposition 3.1.5 *Soit* $\xi<\omega_1$*. Alors il existe* $A_\xi\subseteq 2^{<\omega}$ *tel que* $A_\xi^\infty\in\mathbf{\Sigma}^0_1$ *et* $R(A_\xi)\geq\xi$.

Soit T_ξ un arbre bien fondé de hauteur au moins ξ. Alors $A_\xi:=\Phi'(T_\xi)$ convient.

Notation. On définit une fonction récursive $\pi:n^\omega\times\omega^\omega\times\omega\rightarrow n^{<\omega}$ par

$$\pi(\alpha,\beta,q):=\left\{\begin{array}{l}<\alpha(0),\dots,\alpha(\beta[0])>\ \text{ si }\ q=0,\\ <\alpha(1+\Sigma_{j<q}\ \beta[j]),...,\alpha(\Sigma_{j\leq q}\ \beta[j])>\ \text{ sinon.}\end{array}\right.$$

On a toujours l'équivalence suivante, qui exprime la possibilité d'un découpage en mots de A :

$$\alpha\in A^\infty\ \Leftrightarrow\ \ \exists\beta\in\omega^\omega\ \ [(\forall m>0\ \ \beta(m)>0)\text{ et }(\forall q\in\omega\ \ \pi(\alpha,\beta,q)\in A)].$$

Pour montrer le théorème 3.1.4, on applique le lemme suivant, bien utile tout au long de [L7] :

Lemme 3.1.6 *(a)* A^∞ *est borélien si et seulement s'il existe* $f:n^\omega\rightarrow\omega^\omega$ *borélienne telle que*

$$\alpha\in A^\infty\ \Leftrightarrow\ \ (\forall m>0\ \ f(\alpha)(m)>0)\ \ \textit{et}\ \ (\forall q\in\omega\ \ \pi(\alpha,f(\alpha),q)\in A).$$

(b) Soit $\gamma\in\omega^\omega$*. Alors* $A^\infty\in\Delta^1_1(A,\gamma)$ *si et seulement si pour tout* $\alpha\in n^\omega$ *on a*

$$\alpha\in A^\infty\ \Leftrightarrow\ \ \exists\beta\in\Delta^1_1(A,\gamma,\alpha)\ \ [(\forall m>0\ \ \beta(m)>0)\ \ \textit{et}\ \ (\forall q\in\omega\ \ \pi(\alpha,\beta,q)\in A)].$$

Remarque. Le lemme 3.1.6 est un cas particulier d'une situation plus générale. On a en fait le résultat d'uniformisation suivant, qui est un cas particulier du résultat principal de [D] :

Proposition 3.1.7 *Soient* X*,* Y *des espaces polonais, et* $F\in\mathbf{\Pi}^0_2(X\times Y)$ *tel que* $\Pi_X[F\cap(X\times V)]$ *soit borélienne pour tout* $V\in\mathbf{\Sigma}^0_1(Y)$*. Alors il existe* $f:X\rightarrow Y$ *borélienne telle que* $(x,f(x))\in F$ *pour tout* $x\in\Pi_X[F]$.

Dans notre contexte, $F=\{(\alpha,\beta)\in n^\omega\times\omega^\omega/(\forall m>0\ \ \beta(m)>0)\ \text{ et }\ (\forall q\in\omega\ \ \pi(\alpha,\beta,q)\in A)\}$.

3.2 ω-puissances fermées.

Pour répondre à la question (b), on pose

$$\mathbf{\Sigma}_0 := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / A^\infty = \emptyset\} \text{ et } \mathbf{\Pi}_0 := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / A^\infty = n^\omega\},$$

$$\mathbf{\Delta}_1 := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / A^\infty \in \mathbf{\Delta}^0_1\},$$

$$\mathbf{\Sigma}_\xi := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / A^\infty \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi\} \text{ et } \mathbf{\Pi}_\xi := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / A^\infty \in \mathbf{\Pi}^0_\xi\} \quad (\xi \geq 1),$$

$$\mathbf{\Delta} := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / A^\infty \in \mathbf{\Delta}^1_1\}.$$

Question. $A^\infty \in \mathbf{\Delta}^1_1$ implique-t-il que $A^\infty \in \Delta^1_1(A)$ (probablement pas) ? Si la réponse était positive, $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_\xi$ (pour $\xi \geq 1$) et $\mathbf{\Pi}_\xi$ (pour $\xi \geq 2$) seraient $\mathbf{\Pi}^1_1 \setminus \mathbf{\Delta}^1_1$, par le théorème 3.1.4. Ce théorème ne dit rien sur les ω-puissances fermées. Nous allons donc nous concentrer sur ces dernières. Nous avons vu que A^∞ est fermé si A est fini. Dans cet ordre d'idées, on a le résultat de compacité suivant :

Proposition 3.2.1 *Si $A \in \mathbf{\Delta}_1$, il existe $B \subseteq A$ fini tel que $A^\infty = B^\infty$.*

Ceci devient faux si on suppose seulement que $A \in \mathbf{\Pi}_1$. En effet, nous avons le contre-exemple suivant, dû à O. Finkel : $A := \{s \in 2^{<\omega} / \forall i \leq |s| \ \ 2.\text{Card}(\{j < i / s(j) = 1\}) \geq i\}$. Le résultat qui suit est une conséquence de la proposition 3.2.1 et du théorème de Baire :

Théorème 3.2.2 *(a) $\mathbf{\Sigma}_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ est $\mathbf{\Pi}^0_1$-complet.*
(b) $\mathbf{\Pi}_0$ est un Σ^0_1 dense de $2^{n^{<\omega}}$. En particulier, $\mathbf{\Pi}_0$ est $\mathbf{\Sigma}^0_1$-complet.
(c) $\mathbf{\Delta}_1$ est un $K_\sigma \setminus \mathbf{\Pi}^0_2$ de $2^{n^{<\omega}}$. En particulier, $\mathbf{\Delta}_1$ est $\mathbf{\Sigma}^0_2$-complet.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les ω-puissances finiment engendrées. On pose donc $\mathcal{F} := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / \exists B \in 2^{n^{<\omega}} \text{ fini } A^\infty = B^\infty\}$. On peut montrer que $\mathcal{F}$ est co-rare et $\mathbf{\Sigma}^0_2$-hard (c'est-à-dire que tout $\mathbf{\Sigma}^0_2$ se réduit continûment à $\mathcal{F}$). On peut décomposer $\mathcal{F}$ comme suit. Posons $\mathcal{G}_p := \{A \in 2^{n^{<\omega}} / \exists s_1, \ldots, s_p \in n^{<\omega} \ A^\infty = \{s_1, \ldots, s_p\}^\infty\}$, de sorte que $\mathcal{F} = \bigcup_p \mathcal{G}_p$. On a $\mathcal{G}_0 = \mathbf{\Sigma}_0$, donc $\mathcal{G}_0$ est $\Pi^0_1 \setminus \mathbf{\Sigma}^0_1$.

Proposition 3.2.3 *$\mathcal{G}_1$ est $\mathbf{\Pi}^0_1 \setminus \mathbf{\Sigma}^0_1$. En particulier, $\mathcal{G}_1$ est $\mathbf{\Pi}^0_1$-complet.*

La complexité de $\mathcal{G}_2$ est sans doute le résultat le plus surprenant de l'article [L7]. Son calcul utilise des lemmes sur les décompositions de phrases, finies ou non, en mots finis. Notamment, on utilise le classique lemme du défaut impliquant que deux suites finies qui commutent sont des puissances d'une même suite finie. Dans la veine de la proposition 3.2.1, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.4 *Soit $A \in \mathcal{G}_2$. Alors il existe $F \subseteq A$ fini tel que $A^\infty = F^\infty$.*

Remarque. L'inclusion de $A^\infty = \{s_1, s_2\}^\infty$ dans $\{t_1, t_2\}^\infty$ n'implique pas $\{s_1, s_2\} \subseteq [\{t_1, t_2\}^{<\omega}]^*$ (si $\mathfrak{S} \subseteq (n^{<\omega})^{<\omega}$, on pose $\mathfrak{S}^* := \{S^* / S \in \mathfrak{S}\}$), même si $A \notin \mathcal{G}_1$. En effet, on peut prendre $s_1 := 01$, $s_2 := t_1 := 0$ et $t_2 := 10$. Mais on a $|t_1| + |t_2| \leq |s_1| + |s_2|$, ce qui est général :

Lemme 3.2.5 *Soient A, $B \notin \mathcal{G}_1$ satisfaisant $A^\infty = \{s_1, s_2\}^\infty \subseteq B^\infty = \{t_1, t_2\}^\infty$. Alors il existe $j \in 2$ tel que $|t_{1+i}| \leq |s_{1+[i+j \pmod 2)]}|$, pour $i \in 2$. En particulier, $|t_1| + |t_2| \leq |s_1| + |s_2|$.*

Un corollaire de ceci et de l'application de la dérivation de Hausdorff est le résultat suivant :

Corollaire 3.2.6 *$\mathcal{G}_2$ est $\check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)\setminus D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. En particulier, $\mathcal{G}_2$ est $\check{D}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$-complet.*

On obtient donc un exemple naturel se situant exactement au niveau ω de la hiérarchie de Wadge. Cette complexité ne se lit pas à première vue sur la définition de $\mathcal{G}_2$.

Remarques. (a) La preuve de ce résultat montre aussi que $\mathcal{G}_p \notin D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ si $p \geq 2$.

(b) Si $\{s_1, s_2\} \notin \mathcal{G}_1$ et $\{s_1, s_2\}^\infty = \{t_1, t_2\}^\infty$, alors $\{s_1, s_2\} = \{t_1, t_2\}$.

Conjecture 1. Soit $A \in \mathcal{F}$. Alors il existe $F \subseteq A$ fini tel que $A^\infty = F^\infty$.

Conjecture 2. Soient $p \geq 1$, A, $B \notin \mathcal{G}_p$ tels que $A^\infty = \{s_1, \ldots, s_q\}^\infty \subseteq B^\infty = \{t_1, \ldots, t_{p+1}\}^\infty$. Alors $\Sigma_{1 \leq i \leq p+1} |t_i| \leq \Sigma_{1 \leq i \leq q} |s_i|$.

Conjecture 3. On a $\mathcal{G}_{p+1} \setminus \mathcal{G}_p \in D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ pour tout $p \geq 1$. En particulier, $\mathcal{F} \in K_\sigma \setminus \mathbf{\Pi}^0_2$.

On peut montrer que les conjectures 1 et 2 impliquent la conjecture 3. Ces conjectures visent à généraliser les résultats précédents. Elles sont probablement difficiles à montrer, le lemme du défaut (à savoir l'unicité de la décomposition d'une phrase fabriquée à partir de deux mots n'étant pas puissances d'une même suite finie) devenant faux à partir de trois mots.

3.3 Conclusion.

Nous avons jusque là surtout examiné la question (b). Pour la question (c), on a les résultats suivants de compacité et de catégorie de Baire :

Proposition 3.3.1 *Si $1 \leq \xi < \omega_1$, l'ensemble $\mathcal{A}_\xi$ (resp. $\mathcal{M}_\xi$) des codes de $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\xi$) étant des ω-puissances est $\mathbf{\Sigma}^1_2 \setminus D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ co-maigre dans 2^ω. Si de plus $\xi = 1$, il est co-rare.*

Corollaire 3.3.2 *$\mathcal{A}_1$ est $\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)\setminus D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. En particulier, $\mathcal{A}_1$ est $\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$-complet.*

Pour la question (a), on a d'abord les conséquences suivantes du lemme de König :

Proposition 3.3.3 *On munit A de l'ordre d'extension.*
(a) Si $A \in 2^{n^{<\omega}}$ est une antichaîne, A^∞ est dans $\{\emptyset\} \cup \{n^\omega\} \cup [\mathbf{\Pi}^0_1 \setminus \mathbf{\Sigma}^0_1] \cup [\mathit{\Pi}^0_2(A) \setminus \mathbf{\Sigma}^0_2]$, et chacun de ces cas est possible.
(b) Si $A \in 2^{n^{<\omega}}$ a des antichaînes finies, alors $A^\infty \in \mathbf{\Pi}^0_2$ (et n'est pas $\mathbf{\Sigma}^0_2$ en général).

Par ailleurs, nous avons vu que les niveaux $\{\emptyset\}$, $\{n^\omega\}$, $\mathbf{\Delta}^0_1$, $\mathbf{\Sigma}^0_1$, $\mathbf{\Pi}^0_m$ et $\mathbf{\Sigma}^1_1$ étaient possibles. On peut montrer que les niveaux $\mathbf{\Sigma}^0_1 \oplus \mathbf{\Pi}^0_1$, $D_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, $\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, $\check{D}_3(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ et $\check{D}_2(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ le sont également.

Comme on le voit, le chemin est encore long pour répondre complètement aux questions initiales (a), (b) et (c). D'autres questions ont été posées en cours de route (au début de la section 3.2, et avec les conjectures 1 et 2). Derrière les questions de théorie descriptive, il y a des questions de combinatoire des mots finis, qui sont probablement difficiles. Notamment, la preuve des lemmes 3.2.4 et 3.2.5 est par cas, et le nombre de cas croît exponentiellement avec le nombre de mots. Il faut donc trouver d'autres preuves. Comme souvent avec la théorie descriptive, le calcul de complexités a en partie conduit, et devrait conduire encore plus, à une meilleure compréhension des objets étudiés.

4 Références.

[A-Do-Ke] S. A. Argyros, P. Dodos and V. Kenellopoulos, Tree structures associated to a family of functions, *preprint*

[B] B. Bollobás, *Modern graph theory,* Springer-Verlag, New York, 1998

[Bo] J. Bourgain, On convergent sequences of continuous functions, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B* 32 (1980), 235-249

[C] D. Cenzer, Monotone inductive definitions over the continuum, *J. Symbolic Logic* 41 (1976), 188-198

[Da-E] U. B. Darji and M. J. Evans, Recovering Baire one functions, *Mathematika* 42 (1995), 43-48

[D] G. Debs, Un résultat d'uniformisation borélienne, *Proc. Amer. Math. Soc.* 92, 3 (1984), 445-448

[D-SR] G. Debs and J. Saint Raymond, Borel liftings of Borel sets: some decidable and undecidable statements, *to appear in Mem. Amer. Math. Soc.*

[Fi1] O. Finkel, Topological properties of omega context free languages, *Theoret. Comput. Sci.* 262 (2001), 669-697

[Fi2] O. Finkel, Borel hierarchy and omega context free languages, *Theoret. Comput. Sci.* 290, 3 (2003), 1385-1405

[F-V] C. Freiling and R. W. Vallin, Simultaneous recovery of Baire one functions, *Real Anal. Exchange* 22 (1996/97), 346-349

[H-K-Lo] L. A. Harrington, A. S. Kechris and A. Louveau, A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations, *J. Amer. Math. Soc.* 3 (1990), 903-928

[Hj-K-Lo] G. Hjorth, A. S. Kechris and A. Louveau, Borel equivalence relations induced by actions of the symmetric group, *Ann. Pure Appl. Logic* 92 (1998), 63-112

[K] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory,* Springer-Verlag, 1995

[K-Lo] A. S. Kechris and A. Louveau, A classification of Baire class one functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 318, 1 (1990), 209-236

[K-S-T] A. S. Kechris, S. Solecki and S. Todorčević, Borel chromatic numbers, *Adv. Math.* 141 (1999), 1-44

[Ku] K. Kuratowski, *Topology,* Vol. 1, Academic Press, New York and London, 1966

[L1] D. Lecomte, Classes de Wadge potentielles et théorèmes d'uniformisation partielle, *Fund. Math.* 143 (1993), 231-258

[L2] D. Lecomte, Classes de Wadge potentielles des boréliens à coupes dénombrables, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 317, Série 1 (1993), 1045-1048

[L3] D. Lecomte, Uniformisations partielles et critères à la Hurewicz dans le plan, *Trans. Amer. Math. Soc.* 347, 11 (1995), 4433-4460

[L4] D. Lecomte, Tests à la Hurewicz dans le plan, *Fund. Math.* 156 (1998), 131-165

[L5] D. Lecomte, Complexité des boréliens à coupes dénombrables, *Fund. Math.* 165 (2000), 139-174

[L6] D. Lecomte, How can we recover Baire class one functions?, *Mathematika* 50 (2003) 171-198

[L7] D. Lecomte, Omega-powers and descriptive set theory, *accepted in J. Symbolic Logic*

[L8] D. Lecomte, On minimal non potentially closed subsets of the plane, *submitted*

[L9] D. Lecomte, Hurewicz-like tests for Borel subsets of the plane, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 11 (2005)

[L10] D. Lecomte, How can we recognize potentially $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ subsets of the plane?, *preprint*

[Le-Ta-Z] P. Y. Lee, W. K. Tang and D. Zhao, An equivalent definition of the functions of the first Baire class, *Proc. Amer. Math. Soc.* 129, 8 (2000), 2273-2275
[Lo1] A. Louveau, A separation theorem for Σ_1^1 sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 260 (1980), 363-378
[Lo2] A. Louveau, Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produit, *Astérisque (S. M. F.)* 78 (1980)
[Lo3] A. Louveau, Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets, *Cabal Seminar 79-81, Lecture Notes in Math.* 1019, Springer-Verlag (1983), 28-55
[Lo-SR1] A. Louveau and J. Saint Raymond, Borel classes and closed games: Wadge-type and Hurewicz-type results, *Trans. Amer. Math. Soc.* 304 (1987), 431-467
[Lo-SR2] A. Louveau and J. Saint Raymond, The strength of Borel Wadge determinacy, *Cabal Seminar 81-85, Lecture Notes in Math.* 1333, Springer, Berlin (1988), 1-30
[Lo-SR3] A. Louveau et J. Saint Raymond, Les propriétés de réduction et de norme pour les classes de boréliens, *Fund. Math.* 131 (1988), no. 3, 223-243
[M] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory,* North-Holland, 1980
[O-R] E. Odell and H. P. Rosenthal, A double-dual characterization of separable Banach spaces containing l_1, *Israel J. Math.* 20 (1975), 375-384
[SR] J. Saint Raymond, La structure borélienne d'Effros est-elle standard ?, *Fund. Math.* 100 (1978), 201-210
[Si] P. Simonnet, Automates et théorie descriptive, Thèse, *Université Paris 7,* (Mars 1992)
[St1] L. Staiger, *ω-languages, chapter 6 of the Handbook of Formal Languages, Vol 3,* edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer-Verlag, Berlin, 1997
[St2] L. Staiger, On ω-power languages, *New Trends in Formal Languages, Control, Cooperation and Combinatorics, Lecture Notes in Comput. Sci.* 1218, Springer-Verlag, Berlin (1997), 377-393
[T] S. Todorčević, Compact subsets of the first Baire class, *J. Amer. Math. Soc.* 12, 4 (1999), 1179-1212
[W] W. W. Wadge, Thesis, *Berkeley* (1984)

5 Table des matières.