Concentrations simultanées de fonctions additives

Élie Goudout

Abstract

We study the simultaneous concentrations of the values of several additive functions along polynomial shifts. Under a slight restriction, this yields an extension of a result from Halász in 1975.

1 Introduction et énoncé des résultats

Étant donné f une fonction additive et $r \geqslant 0$ une fonction multiplicative, pour tout $x \geqslant 2$ on note

$$E_f(x;r) := 1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{r(p)}{p},$$

et on pose $E_f(x;1) := E_f(x)$. En 1975, Halász [Hal75] montre qu'uniformément pour f additive et $x \geqslant 1$, on a

$$\sup_{k \in \mathbb{R}} \# \{ n \leqslant x : \quad f(n) = k \} \ll \frac{x}{\sqrt{E_f(x)}}.$$

Dans le cas où $f = \omega$ est la fonction nombre de facteurs premiers, lorsque x est grand on a[1] $E_f(x) = \log_2 x + O(1)$, et la majoration est optimale à constante près lorsque l'entier k vérifie $k = \log_2 x + O(\sqrt{\log_2 x})$.

On s'intéresse à une généralisation de ce théorème lorsqu'on fixe plusieurs valeurs de fonctions additives. Il s'agit entre autres, étant données f et g deux fonctions additives, de majorer le cardinal

$$\sup_{k,k' \in \mathbb{R}} \# \left\{ n \leqslant x : \quad f(n) = k, \ g(n+1) = k' \right\}.$$

Le cas $f = g = \omega$ a été traité dans [Gou17], puis repris avec plus de généralité dans [Ten18]. Il y est notamment montré

$$\sup_{k,k' \in \mathbb{Z}} \# \left\{ n \leqslant x : \quad \omega(n) = k, \ \omega(n+1) = k' \right\} \ll \frac{x}{\log_2 x}. \tag{1}$$

Dans ces deux articles, la majoration est même explicite en $k, k' \ll \log_2 x$. Ici, on traite le cas de fonctions additives quelconques, mais prenant peu de valeurs distinctes sur les puissances de grands nombres premiers. On note qu'en considérant

$$\mathcal{A} := \left\{ n \leqslant x : \quad \log_2 x - 10\sqrt{\log_2 x} \leqslant \omega(n), \omega(n+1) \leqslant \log_2 x + 10\sqrt{\log_2 x} \right\},$$

1. Ici et dans la suite, on note $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction log. ($k \geqslant 2$)

qui vérifie $|\mathcal{A}| \geqslant x/2$ lorsque x est assez grand, avec (1) on obtient

$$\sup_{k,k'\in\mathbb{Z}} \#\big\{n \leqslant x : \quad \omega(n)=k,\ \omega(n+1)=k'\big\} \asymp \frac{x}{\log_2 x}.$$

On définit maintenant le cadre général d'étude. Étant donné $r \geqslant 1$ un entier fixé, comme dans [Ten18], on considère une famille $\{Q_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$ de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, deux à deux premiers entre eux et sans diviseur fixe. On pose $Q := \prod_{1\leqslant j\leqslant r} Q_j$. Pour $m \geqslant 1$, on note $\rho_j(m)$ (*resp.* $\rho_0(m)$) le nombre de racines de Q_j (*resp.* de Q) dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et D_j (*resp.* D) le discriminant de Q_j (*resp.* de Q). On note

$$\begin{aligned}
&g_j := \deg Q_j, \quad (0 \leqslant j \leqslant r) \qquad g := g_0 = \sum_{1\leqslant j\leqslant r} g_j,\\
&Q(X) = \sum_{0\leqslant i\leqslant g} \beta_i X^i, \qquad \beta := \beta_g, \qquad \|Q\| := \max_{0\leqslant i\leqslant g} |\beta_i|,\\
&\varphi_j(n) := n\prod_{p|n}\Big(1-\frac{\rho_j(p)}{p}\Big), \qquad (n\geqslant 1,\ 0\leqslant j\leqslant r)
\end{aligned}$$

où ici et dans la suite, p désigne un nombre premier. On rappelle quelques bornes classiques – *cf.* [Nag51, th. 51-52] et [Ste91, (44)]. Pour $0 \leqslant j \leqslant r$ et $\nu \geqslant 1$,

$$\rho_j(p^\nu) \leqslant \min(g_j p^{\nu-1}, g_j p^{\nu-\nu/g_j}, p^{\nu-1}\rho_j(p)), \qquad (p\geqslant 2) \tag{2}$$

$$\rho_j(p^\nu) = \rho_j(p) \leqslant \min(g_j, p-1). \qquad (p\nmid D_j,\ p\geqslant 2) \tag{3}$$

D'après [Lan27, *satz* 191] et [Ten90, lem. 3.1], il existe des constantes $M_j, M_j' \geqslant 1$ et une constante $c = c(g)$ telles que pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $x \geqslant 2$,

$$\Big|\sum_{p\leqslant x} \frac{\rho_j(p)}{p} - \log_2 x\Big| \leqslant M_j \tag{4}$$

$$\sum_{p\leqslant x} \rho_j(p) = \mathrm{li}(x) + O\big(M_j' + x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}\big). \tag{5}$$

On pose $M := \sum_{1\leqslant j\leqslant r} M_j$ et $M' := \sum_{1\leqslant j\leqslant r} M_j'$. Étant donnée une fonction additive ou multiplicative définie sur $\mathbb{N}$, on l'étend naturellement à $\mathbb{Z}$ par parité et en fixant arbitrairement sa valeur en 0 à 0.

Théorème 1. *Soit $r, g, \mathfrak{V} \geqslant 1$ des entiers et $0 < \varepsilon, \delta, \lambda < 1$ des réels, tous fixés. Pour $x \geqslant 1$, on pose $z := \mathrm{e}^{(\log x)^{1-\lambda}}$. Il existe des constantes $K, c_0 > 0$ telles qu'uniformément pour $x \geqslant c_0\|Q\|^\delta$, $x^\varepsilon < y \leqslant x$, et $f_1, \dots, f_r$ des fonctions additives vérifiant, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,*

$$\#\big\{f_j(n) : \quad n \leqslant t^u,\ P^-(n) > t\big\} \leqslant \mathfrak{V}^u, \qquad (t\geqslant z,\ u\geqslant 1) \tag{$*$}$$

on a

$$\sup_{k_1,\dots,k_r\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ f_j(Q_j(n))=k_j \quad (1\leqslant j\leqslant r)}} 1 \ll \Big(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\Big)^K \frac{\mathrm{e}^{3M+M'/z} y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}, \tag{6}$$

La constante implicite, K et c_0 dépendent au plus de $r, g, \mathfrak{V}, \varepsilon, \delta$ et λ.

On note que dans beaucoup de cas d'étude, $M' \ll z$. En particulier, si les polynômes $Q_1, \dots, Q_r$ sont fixés, on obtient

$$\sup_{k_1,\dots,k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j \quad (1\leqslant j\leqslant r)}} 1 \ll \frac{y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}.$$

Par ailleurs, l'hypothèse $(*)$ ne fait pas intervenir les $f_j(p^\nu)$ pour $p \leqslant z$, et elle est automatiquement vérifiée si $f_j(p^\nu)$ ne dépend que de ν pour $p > z$. Par exemple, cela est vrai pour la fonction nombre de facteurs premiers, avec ou sans multiplicité. On mentionne aussi que

$$\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi(\beta D)}\right)^g.$$

Il serait intéressant de pouvoir se passer de l'hypothèse $(*)$, qui semble n'être qu'un artefact de la méthode employée.

Pour compléter le résultat, on s'intéresse à une borne inférieure pour le membre de gauche de (6).

Théorème 2. *Soit $r, g, \mathfrak{V} \geqslant 1$ des entiers et $0 < \varepsilon, \delta < 1$ des réels, tous fixés. On pose $\varepsilon_0 := \varepsilon/(50g)$ et on note $(*')$ la condition $(*)$ restreinte aux $t \geqslant x^{\varepsilon_0}$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle qu'uniformément pour $x \geqslant c_0\|Q\|^\delta$, et $f_1, \dots, f_r$ des fonctions additives vérifiant $(*')$, on a*

$$\sup_{k_1,\dots k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M} y}{(\log x)^r} \sup_{k_1,\dots k_r \in \mathbb{R}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_r \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ f_j(a_j)=k_j \\ (a_i,a_j)=(a_j,\beta D)=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}, \tag{7}$$

et en particulier, en notant ω_y la fonction nombre de facteurs premiers distincts inférieurs ou égaux à y, uniformément pour $y_1, \dots, y_r \geqslant 1$,

$$\sup_{k_1,\dots k_r \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \left(\frac{\varphi(\beta D)}{\beta D}\right)^g \frac{\mathrm{e}^{-2M} y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{\omega_{y_j}}(x;\rho_j)}}. \tag{8}$$

Les constantes implicites et c_0 dépendent au plus de $r, g, \mathfrak{V}, \varepsilon$ et δ

Dans le cas où les polynôme $Q_1, \dots, Q_r$ sont fixés et $f_j = \omega_{y_j}$ pour tout j, les estimations (6) et (8) sont du même ordre de grandeur.

2 Majoration

Dans cette section, on démontre le Théorème 1. Pour cela, on commence par démontrer deux lemmes.

Lemme 3. *Uniformément pour $B_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ des réels, on a*

$$\int_0^1 \Big(1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi n t) B_n\Big) \mathrm{e}^{-\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi n t) B_n} \mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} B_n}}.$$

Démonstration. On montre d'abord qu'uniformément pour $B > 0$, on a
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)B}\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{1+B}}.$$
En posant $\sin(\pi t)\sqrt{B} = u$, on obtient
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)B}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{B}} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{B-u^2}}\mathrm{d}u \ll \frac{1}{\sqrt{1+B}}.$$
Dans le cas général maintenant, quitte à ne sommer que sur les $B_n \neq 0$, on peut supposer que tous les B_n sont non nuls. De même, quitte à ne considérer que les sommes partielles pour $0 < |n| \leqslant N$ puis à faire tendre N vers $+\infty$, on suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} B_n < \infty$. On définit alors, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, le réel ϑ_n tel que $\vartheta_n B_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}*} B_i =: B$. On vérifie que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 1/\vartheta_n = 1$. Il vient
$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(1+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi nt)B_n\Big)&\mathrm{e}^{-\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi nt)B_n}\mathrm{d}t\\
&\leqslant 2\int_0^1 \prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sin^2(\pi nt)B_n}\Big)\mathrm{d}t\\
&\leqslant 2\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi nt)\frac{\vartheta_n}{2}B_n}\mathrm{d}t\Big)^{1/\vartheta_n}\\
&\leqslant 2\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)\frac{B}{2}}\mathrm{d}t\Big)^{1/\vartheta_n}\\
&\ll \frac{1}{\sqrt{1+B}},\end{aligned}$$
où l'on a successivement utilisé $1 + x \leqslant 2\mathrm{e}^{x/2}$ pour $x \geqslant 0$, l'inégalité de Hölder et la 1-périodicité de $t \mapsto \sin^2(\pi t)$. □

On démontre maintenant une généralisation du théorème de Halász pour une seule fonction additive, dans le cas de poids non constants. Dans la suite, pour $1 \leqslant y \leqslant x$, on note
$$\mathcal{S}(x,y) := \{n \leqslant x : \quad P^+(n) \leqslant y\}, \tag{9}$$
l'ensemble des entiers y-friables inférieurs ou égaux à x. On utilise aussi la notation classique
$$\mathrm{Li}(t) := \int_2^t \frac{\mathrm{d}t}{\log t}. \qquad (t \geqslant 2)$$
Lemme 4. *Soient $\varepsilon, b, A > 0$ et $0 < \lambda < 1$ des constantes. Étant donné $y \geqslant 1$, on pose $z := \mathrm{e}^{(\log y)^{1-\lambda}}$. Uniformément pour $C, C' \geqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant x$ tels que $(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)} \geqslant (\log_2 x)^2$, f une fonction additive telle que*
$$\#\{f(p) : \quad t < p \leqslant t^{\mathrm{e}}\} \leqslant A, \qquad (z \leqslant t \leqslant y) \tag{10}$$
et $r \geqslant 0$ une fonction multiplicative telle que
$$\max_{p\leqslant y} r(p) \leqslant A, \qquad \sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 2}} \frac{r(p^\nu)\log(p^\nu)}{p^\nu} \leqslant A, \tag{11}$$
$$\Big|\sum_{p\leqslant t}\frac{r(p)}{p} - b\log_2 t\Big| \leqslant C, \qquad (2 \leqslant t \leqslant y) \tag{12}$$

pour laquelle il existe une fonction multiplicative $\widetilde{r}$ telle que

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{|r(p)-\widetilde{r}(p)|}{p}\leqslant A, \tag{13}$$

$$\left|\sum_{p\leqslant t}\widetilde{r}(p)-b\mathrm{Li}(t)\right|\leqslant A\left(C'+\frac{t}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\right), \qquad (2\leqslant t\leqslant y) \tag{14}$$

on a, en posant $u:=(\log x)/\log y$*,*

$$\sup_{k\in\mathbb{R}}\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\ f(n)=k}}r(n)\ll\frac{\mathrm{e}^{2C+C'/z}x(\log x)^{b-1}\log(1+u)}{u^b\sqrt{E_f(y;r)}},$$

où la constante implicite dépend au plus de ε, b, A *et* λ*.*

On note que la condition (10) peut être affaiblie en

$$\#\left\{f(p):\quad t<p\leqslant t^{1+c}\right\}\leqslant A \qquad\qquad (z\leqslant t\leqslant y)$$

avec $c:=(\log_2 x)^2/(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)}\leqslant 1$, par adaptation directe de la méthode. Il est par ailleurs possible de démontrer une version uniforme en ε. La démonstration est fortement inspirée de [BT18, th. 1.1].

Démonstration. Comme le fait remarquer Halász au début de la démonstration du théorème de [Hal75], quitte à modifier f d'une manière précise, on peut supposer qu'elle est à valeurs entières. La construction qu'il emploie garantit que le nombre de valeurs prises par $f(p)$ n'augmente pas, et que la somme étudiée ne peut qu'augmenter tandis que $E_f(y;r)$ demeure identique. Ainsi, en posant $R(t):=\sum_{n\in\mathcal{S}(x,y)}r(n)\mathrm{e}^{2i\pi f(n)t}$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on a

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\ f(n)=k}}r(n)=\int_0^1 R(t)\mathrm{e}^{-2ik\pi t}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|R(t)|\mathrm{d}t.$$

En utilisant (11) et (12), on applique le théorème 1.1 de [Ten17] avec $T:=(\log_2 x)^2$ et on utilise la démonstration du corollaire 2.1 de ce même article, pour obtenir uniformément pour $t\in[0,1]$,

$$|R(t)|\ll\mathrm{e}^C x(\log x)^{b-1}\frac{\log(1+u)}{u^b}\left\{\frac{1+m(t)}{\mathrm{e}^{m(t)}}+\frac{1}{\log_2 x}\right\} \tag{15}$$

où

$$m(t):=\min_{|\tau|\leqslant(\log_2 x)^2}\sum_{p\leqslant y}\frac{r(p)(1-\cos(2\pi f(p)t-\tau\log p))}{p}.$$

On pose, pour $k\geqslant 0$ et $t\in[0,1]$,

$$\gamma_{k,t}(\vartheta):=1-\max_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ z<p\leqslant y}}\cos(2\pi f(p)t-\vartheta), \qquad (\vartheta\in\mathbb{R})$$

$$s_t:=\min_{k\geqslant 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_{k,t}(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\geqslant 1-\frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{A}\right)\gg 1,$$

avec la convention $\max_\emptyset = 0$. Dans la définition de $\gamma_{k,t}$, on rappelle que $f(p)$ prend au plus A valeurs différentes lorsque $k < \log_2 p \leqslant k+1$. Pour tous $z \leqslant y_0 \leqslant y$, on a alors pour un certain $|\tau| \leqslant (\log_2 x)^2$,

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ y_0<p\leqslant y}} \frac{r(p)\gamma_{k,t}(\tau\log p)}{p} \\ &\geqslant \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ y_0<p\leqslant y}} \frac{\widetilde{r}(p)\gamma_{k,t}(\tau\log p)}{p} - A, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (13). De manière analogue à [Ten15, lem. III.4.13], on estime la somme ci-dessus à l'aide de (14), par sommation par parties. On obtient ainsi, uniformément pour $z \leqslant y_0 \leqslant y$ et $t \in [0,1]$, lorsque $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant s_t b \log\left(\frac{\log y}{\log y_0}\right) + O\Bigg(\sum_{\log_2 y_0 - 1 < k \leqslant \log_2 y} \frac{1}{|\tau|\mathrm{e}^k} + (1+|\tau|)\Big(\frac{1}{(\mathrm{e}^k)^\varepsilon} + \frac{C'}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^k}}\Big)\Bigg) \\ &\geqslant s_t b \log\left(\frac{\log y}{\log y_0}\right) + O\Bigg(\frac{1}{|\tau|\log y_0} + (1+|\tau|)\Big(\frac{1}{(\log y_0)^\varepsilon} + \frac{C'}{y_0^{1/\mathrm{e}}}\Big)\Bigg). \end{aligned}$$

Si $1 \leqslant |\tau| \leqslant (\log_2 x)^2$, on pose $y_0 := z^{3\mathrm{e}}$. Puisque $(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)} \geqslant (\log_2 x)^2$, on obtient

$$m(t) \geqslant \lambda s_t b \log_2 y + O\left(1 + \frac{C'}{z^2}\right).$$

On définit ensuite w tel que

$$\log w = 2\mathrm{e}(\log y)\exp\left(-\frac{\lambda}{b}\Big\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\Big\}\right).$$

D'après (12), on a $w \geqslant z^{2\mathrm{e}}$. Si $w \geqslant y$, on retient trivialement que $m(t) \geqslant 0$. Dans le cas contraire, si $1/\log w < |\tau| \leqslant 1$, avec $y_0 := w$, on obtient

$$m(t) \geqslant \lambda s_t \Big\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\Big\} + O\left(1 + \frac{C'}{z^2}\right).$$

Enfin, lorsque $|\tau| \leqslant 1/\log w$, on minore trivialement

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant \sum_{p\leqslant w} \frac{r(p)(1-\cos(2\pi f(p)t))}{p} + O(1) \\ &= 2\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant w\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} + O(1) \\ &\geqslant 2\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2b\log\left(\frac{\log y}{\log w}\right) - 4C + O(1) \\ &\geqslant 2(1-\lambda)\Big\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\Big\} + O(1). \end{aligned}$$

Ainsi, quelle que soit la valeur de τ, en posant $\eta := \min\big(\lambda s_t b, \lambda s_t, 2(1-\lambda), 1/2\big)$, lorsque x (et donc z) est suffisamment grand, on a

$$m(t) \geqslant \eta \sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - \Big(C + \frac{C'}{z} + O(1)\Big)$$

et $m(t) \geqslant 0$. Ainsi, avec (15), on obtient le résultat désiré en intégrant selon t, par application directe du Lemme 3. □

On démontre désormais le théorème. Soit $2 \leqslant y \leqslant x$ et $n \in (x, 2x]$. Un élément clé de la preuve de (1) est que si l'on note n_y la partie y-friable de n, alors $\omega(n) - \omega(n_y)$ ne peut prendre au plus qu'un nombre fini de valeurs lorsque $\log y \asymp \log x$. Cela est toujours vrai lorsqu'on remplace ω par une fonction additive vérifiant $(*)$. C'est la seule hypothèse du théorème sur les fonctions additives, et il serait intéressant de pouvoir s'en passer. La démonstration diffère peu de celle de [Ten18].

Démonstration du Théorème 1. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Durant la démonstration, on note K une constante positive qui sera toujours prise suffisamment grande au besoin. Puisque Q n'admet qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{Z}$, on peut, sans perte de généralité, faire tous nos raisonnements en supposant $Q(n) \neq 0$. On se donne $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}$ fixés. Pour tout entier $n \geqslant 1$ avec $Q(n) \neq 0$, on note ξ_n le plus grand entier tel que la partie ξ_n-friable de $Q(n)$ soit inférieure ou égale à $x^{2\varepsilon/3}$. On obtient ainsi la décomposition canonique $Q(n) = b_n \prod_{1\leqslant j\leqslant r} a_{j,n}$ où b_n est la partie ξ_n-criblée de $Q(n)$, et pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, $a_{j,n} | Q_j(n)$. On note $p_n := P^-(b_n)$ et ν_n tel que $p_n^{\nu_n} \| Q(n)$.

On note $N_1(x)$ le nombre d'entiers n apparaissant dans la somme de (6) pour lesquels $a_{1,n} \cdots a_{r,n} \leqslant x^{\varepsilon/3}$. On note $N_2(x)$ le nombre des autres entiers n de la somme de (6). Pour la suite, on pose

$$\gamma := g + 1/\delta + 1,$$

de sorte que $|Q(n)| \leqslant x^\gamma$ pour x suffisamment grand et $x < n \leqslant x + y$; et on note

$$\mathcal{V}_u := \Big\{ f_j(n) : \quad 1 \leqslant j \leqslant r,\ n \leqslant x^\gamma,\ P^-(n) > x^{\gamma/u} \Big\}. \qquad (u \geqslant 1)$$

D'après $(*)$, on a $|\mathcal{V}_u| \leqslant r\mathfrak{V}^u$ dès que $x^{\gamma/u} \geqslant z$.

Considérons n compté dans $N_1(x)$. Alors $p_n^{\nu_n} > x^{\varepsilon/3}$. Par ailleurs, si $p_n > x^{\varepsilon/(6g)}$, en posant $\eta_0 := 6g\gamma/\varepsilon$, on a $f_j\big(Q_j(n)\big) - f_j(a_{j,n}) \in \mathcal{V}_{\eta_0}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$ lorsque x est assez grand. Ainsi,

$$N_1(x) \leqslant \sum_{\substack{a_1\cdots a_r\leqslant x^{\varepsilon/3}\\ k_j - f_j(a_j)\in\mathcal{V}_{\eta_0}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ a_j|Q_j(n)\\ P^-(Q(n)/(a_1\cdots a_r))>x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 + \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^\nu > x^{\varepsilon/3}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^\nu\|Q(n)}} 1. \qquad (16)$$

On majore en premier la seconde double somme. Pour les p considérés, quitte à remplacer ν par $\nu' \leqslant \nu$ le plus petit tel que $p^{\nu'} > x^{\varepsilon/3}$ et $p^\nu \| Q(n)$ par $p^{\nu'} | Q(n)$ — auquel cas $p^{\nu'-1} \leqslant x^{\varepsilon/3}$ et donc $p^{\nu'} \leqslant p x^{\varepsilon/3} \leqslant x^{\varepsilon/2} \leqslant y$ —, on peut supposer $p^\nu \leqslant y$. On obtient

$$\sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^\nu > x^{\varepsilon/3}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^\nu\|Q(n)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ x^{\varepsilon/3}<p^\nu\leqslant y}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^\nu|Q(n)}} 1 \leqslant 2 \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^\nu > x^{\varepsilon/3}}} \frac{y\rho_0(p^\nu)}{p^\nu} \ll \frac{y}{x^{\varepsilon/(6g)}},$$

où la dernière inégalité est une conséquence directe de (2).

On majore maintenant la première double somme de (16). Comme dans [Ten18], pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, on décompose a_j sous la forme $a_j = t_j d_j$ où $t_j|(\beta D)^\infty$ et $(d_j, \beta D) = 1$, de sorte que $k_j - f_j(t_j) - f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}$ et $(d_i, d_j) = 1$ pour tous $i \neq j$. En posant $T := t_1 \cdots t_r$, on a alors

$$\sum_{\substack{a_1\cdots a_r \leqslant x^{\varepsilon/3} \\ k_j - f_j(a_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ a_j|Q_j(n) \\ P^-(Q(n)/(a_1\cdots a_r)) > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 \ll \sum_{\substack{t_1 d_1 \cdots t_r d_r \leqslant x^{\varepsilon/3} \\ T|(\beta D)^\infty \\ (d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1 \\ k_j - f_j(t_j) - f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ T|Q(n) \\ d_j|Q_j(n) \\ p|Q(n) \Rightarrow p|Td_1\cdots d_r \text{ ou } p > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1$$

Avec le même raisonnement de crible que [Ten18], on majore la dernière somme, sous les hypothèses $Td_1 \cdots d_r \leqslant x^{\varepsilon/3}$, $T|(\beta D)^\infty$ et $(d_i, d_j) = (d_j, \beta D) = 1$, par

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ T|Q(n) \\ d_j|Q_j(n) \\ p|Q(n) \Rightarrow p|Td_1\cdots d_r \text{ ou } p > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 \ll \frac{\mathrm{e}^M y}{(\log x)^r} \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r \frac{\rho_0(T)}{T} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$

En posant

$$H := \mathrm{e}^M \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r,$$
$$S_j(t_j) := \sum_{\substack{d_j \leqslant x \\ (d_j,\beta D)=1 \\ k_j - f_j(t_j) - f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant r)$$

on obtient alors

$$N_1(x) \ll \frac{Hy}{(\log x)^r} \sum_{t_1\cdots t_r|(\beta D)^\infty} \frac{\rho_0(T)}{T} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} S_j(t_j) + \frac{y}{x^{\varepsilon/(6g)}}.$$

Lorsque x est assez grand, on a $|\mathcal{V}_{\eta_0}| \leqslant r\mathfrak{V}^{\eta_0} \ll 1$. Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on définit la fonction multiplicative $\tilde{\rho}_j$ par

$$\tilde{\rho}_j(p^\nu) := \frac{\rho_j(p^\nu)p^\nu}{\varphi_j(p^\nu)}, \qquad (p \nmid \beta D,\ \nu \geqslant 1)$$
$$\tilde{\rho}_j(p^\nu) := 0, \qquad (p|\beta D,\ \nu \geqslant 2)$$
$$\tilde{\rho}_j(p) := \rho_j(p), \qquad (p|\beta D)$$

de sorte que

$$S_j(t_j) \ll \sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ f_j(n)=k}} \frac{\tilde{\rho}_j(n)}{n}.$$

Puisque $\rho_j(p) \leqslant \min(p-1, g_j)$, on a

$$\sum_{p\leqslant t} \frac{\tilde{\rho}_j(p)}{p} = \sum_{p\leqslant t} \frac{\rho_j(p)}{p} + O(1). \qquad (t \geqslant 2) \tag{17}$$

On pose
$$x_0 := \mathrm{e}^{(\log x)^{1-\lambda/2}}. \tag{18}$$
Soit $\lambda' > 0$ tel que $(1-\lambda/2)(1-\lambda') \geqslant 1-\lambda$. Avec (4), (5) et (17), on applique le Lemme 4 à $\tilde{\rho}_j$. Ainsi, pour tout $x' \in (x_0, x]$, en posant $z' := \mathrm{e}^{(\log x')^{1-\lambda'}}$, on obtient
$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{n\leqslant x' \\ f_j(n)=k}} \tilde{\rho}_j(n) \ll \frac{\mathrm{e}^{2M_j+M_j'/z'}x'}{\sqrt{E_{f_j}(x';\rho_j)}},$$
puisque $E_{f_j}(x';\tilde{\rho}_j) \asymp E_{f_j}(x';\rho_j)$. Par ailleurs, on a facilement
$$\sum_{n\leqslant x_0} \frac{\tilde{\rho}_j(n)}{n} \ll \mathrm{e}^{M_j}\log x_0 = \mathrm{e}^{M_j}(\log x)^{1-\lambda/2}.$$
Finalement, via une sommation par parties sur $(x_0, x]$, on obtient pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,
$$S_j(t_j) \ll \frac{\mathrm{e}^{2M_j+M_j'/z}\log x}{\sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}. \tag{19}$$
La majoration voulue pour $N_1(x)$ découle alors de l'inégalité
$$\sum_{T|(\beta D)^\infty} \frac{\rho_0(T)\tau_r(T)}{T} \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K,$$
qui est une conséquence facile de (2).

On majore désormais $N_2(x)$. Pour cela, on introduit $q_n := P^+(a_{1,n}\cdots a_{r,n})$ et on pose $\eta(q_n) := \gamma(\log x)/\log q_n$, de sorte que $f_j\big(Q_j(n)\big) - f_j(a_{j,n}) \in \mathcal{V}_{\eta(q_n)}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$ lorsque x est assez grand. Avec $(*)$, pour $q_n \geqslant z$, on a $|\mathcal{V}_{\eta(q_n)}| \leqslant r\mathfrak{V}^{\eta(q_n)}$. En décomposant les a_j comme dans le cas de $N_1(x)$, on obtient
$$N_2(x) \leqslant \sum_{q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \sum_{\substack{x^{\varepsilon/3}<t_1d_1\cdots t_rd_r\leqslant x^{2\varepsilon/3} \\ P^+(Td_1\cdots d_r)=q \\ T|(\beta D)^\infty \\ (d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1 \\ k_j-f_j(t_j)-f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta(q)}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ T|Q(n) \\ d_j|Q_j(n) \\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\cdots d_r \text{ ou } p>q}} 1. \tag{20}$$
Comme précédemment, sous les hypothèses $Td_1\cdots d_r \leqslant x^{2\varepsilon/3}$, $(d_i,d_j) = (d_j,\beta D) = 1$ et $T|(\beta D)^\infty$, on majore la dernière somme
$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ T|Q(n) \\ d_j|Q_j(n) \\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\cdots d_r \text{ ou } p>q}} 1 \ll \frac{Hy}{(\log q)^r}\frac{\rho_0(T)}{T}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$
Soit $C > 0$ une constante que l'on fixera plus tard. Pour $q \geqslant 2$, on pose
$$\alpha = \alpha(q) := C/\log q.$$
Dans (20), on majore trivialement la contribution des $q \leqslant \mathrm{e}^{2gC}$. Pour cela, on remarque qu'avec (2), lorsque $P^+(m) \leqslant \mathrm{e}^{2gC}$ et $0 \leqslant j \leqslant r$, on a $\varphi_j(m) \gg m$ et $\rho_j(m) \ll m^{1-1/g_j}$.

Pour le reste, on utilise l'astuce de Rankin en introduisant $(Td_1\cdots d_r/x^{\varepsilon/3})^\alpha > 1$. On obtient alors

$$N_2(x) \ll Hy \sum_{\mathrm{e}^{2gC}<q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \frac{1}{(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}} \sum_{\substack{t_1d_1\cdots t_rd_r\leqslant x^{2\varepsilon/3}\\ P^+(Td_1\cdots d_r)=q\\ T|(\beta D)^\infty\\ (d_j,\beta D)=1\\ k_j-f_j(t_j)f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta(q)}}} \frac{\rho_0(T)}{T^{1-\alpha}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(d_j)d_j^\alpha}{\varphi_j(d_j)} + \frac{Hy}{x^{\varepsilon/(4g)}}. \tag{21}$$

Pour $\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0$, on a $\alpha \leqslant 1/(2g)$ et avec (18), $x^{\varepsilon\alpha/3} \gg \mathrm{e}^{2(\log x)^{\lambda/3}}$. On majore alors la contribution des $q \in (\mathrm{e}^{2gC}, x_0]$ avec (2) et (3) en négligeant la condition sur les valeurs de $f_j(d_j)$. Pour cela, on remarque notamment qu'uniformément pour $p \leqslant q$ et $\nu \geqslant 1$,

$$\frac{\rho_0(p^\nu)}{p^{\nu(1-\alpha)}} \ll \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p^{\nu/(2g)}}\right), \tag{22}$$

$$\frac{\rho_j(p^\nu)p^{\nu\alpha}}{\varphi_j(p^\nu)} \ll \frac{1}{p^{\nu(1-\alpha)}}. \qquad (p \nmid \beta D,\ 1 \leqslant j \leqslant r) \tag{23}$$

On obtient alors

$$\sum_{\mathrm{e}^{2gC}<q\leqslant x_0} \frac{1}{(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}} \sum_{\substack{Td_1\cdots d_r\leqslant x^{2\varepsilon/3}\\ P^+(Td_1\cdots d_r)=q\\ T|(\beta D)^\infty\\ (d_j,\beta D)=1}} \frac{\rho_0(T)\tau_r(T)}{T^{1-\alpha}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(d_j)d_j^\alpha}{\varphi_j(d_j)}$$
$$\ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K \mathrm{e}^{-(\log x)^{\lambda/3}},$$

Par ailleurs, on montre que pour $q \in (x_0, x^{2\varepsilon/3}]$, la somme intérieure de (21) est

$$\ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}(\log x)^r \mathfrak{V}^{r\eta(q)}}{q\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}}.$$

Pour cela, on montre que pour $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d\in\mathcal{S}(x,q)\\ (d,\beta D)=1\\ f_j(d)=k}} \frac{\rho_j(d)d^\alpha}{\varphi_j(d)} \ll \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}\log x}{\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}},$$

$$\sum_{\nu\geqslant 1}\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d\in\mathcal{S}(x,q-1)\\ (q^\nu d,\beta D)=1\\ f_j(q^\nu d)=k}} \frac{\rho_j(q^\nu d)(q^\nu d)^\alpha}{\varphi_j(q^\nu d)} \ll \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}\log x}{q\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}}.$$

Avec (23), la première inégalité implique facilement la seconde. De manière analogue à (19), la première inégalité est conséquence du Lemme 4. Afin d'en vérifier les hypothèses, on remarque que

$$\sum_{p\leqslant q} \frac{\rho_j(p)}{p^{1-\alpha}} = \sum_{p\leqslant q} \frac{\rho_j(p)}{p} + O(1).$$

Par ailleurs, de manière analogue au cas $\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0$, la somme sur T se majore avec (22). Pour conclure, il suffit de noter que l'on a

$$\sum_{x_0 < q \leqslant x^{2\varepsilon/3}} \frac{(\log x)^r \mathfrak{V}^{r\eta(q)}}{q(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}} \ll \frac{1}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}$$

dès que $\varepsilon C > 3r\gamma\log(\mathfrak{V})$. □

3 Minoration

Démonstration du Théorème 2. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Pour tout $x < n \leqslant x+y$ tel que $Q(n) \neq 0$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, on pose $a_{j,n}$ la partie x^{ε_0}-friable de $Q_j(n)$. Pour x suffisamment grand, on a $|Q(n)| \leqslant x^{g+1/\delta+1}$. Ainsi, puisque $f_1, \dots f_r$ vérifient $(*)$ pour $t \geqslant x^{\varepsilon_0}$, $f_j\big(Q_j(n)\big) - f_j(a_{j,n})$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs lorsque $x < n \leqslant x+y$. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que pour tout $p > x^{\varepsilon_0}$, on a $f_j(p^\nu) = 0$ lorsque $\nu \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant r$. Dans ce cas-là, pour tout $k_1, \dots k_r \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \geqslant \sum_{\substack{a_1\cdots a_r \in \mathcal{S}(x,x^{\varepsilon_0}) \\ f_j(a_j)=k_j}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ a_j | Q_j(n) \\ P^-(Q(n)/(a_1\cdots a_r))>x^{\varepsilon_0}}} 1,$$

où l'on a utilisé la notation (9).

On introduit quelques notations utilisées dans [Hen12] et [Hen14]. Pour $n \geqslant 1$, on note $\kappa(n)$ le noyau sans facteurs carrés de n. Si de plus $m \geqslant 1$ est un autre entier, on écrit $n \| m$ pour signifier $n | m$ et $(n, m/n) = 1$. Par ailleurs, pour $a_1, \dots, a_r \geqslant 1$, on pose

$$\check{\rho}(a_1,\dots,a_r) := \#\big\{n \mod [a_1\kappa(a_1)\cdots a_r\kappa(a_r)] : \\ \forall 1 \leqslant j \leqslant r,\ a_j \| Q_j(n),\ a_1\cdots a_r \| Q(n)\big\}.$$

D'après la version corrigée dans [Hen14] de [Hen12, lem. 6], on a alors

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg y \sum_{\substack{a_1\cdots a_r \in \mathcal{S}(x^{3\varepsilon/25},x^{\varepsilon_0}) \\ f_j(a_j)=k_j}} \frac{\check{\rho}(a_1,\dots,a_r)}{[a_1\kappa(a_1)\cdots a_r\kappa(a_r)]} \prod_{\substack{g<p\leqslant x^{\varepsilon_0} \\ p\nmid a_1\cdots a_r}} \Big(1 - \frac{\rho_0(p)}{p}\Big).$$

Puisque $\rho_0(p) \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant r} \rho_j(p)$, avec (2) et (4), on a

$$\prod_{\substack{g<p\leqslant x^{\varepsilon_0} \\ p\nmid a_1\cdots a_r}} \Big(1 - \frac{\rho_0(p)}{p}\Big) \gg \frac{\mathrm{e}^{-M}}{(\log x)^r}.$$

Pour obtenir (7), il suffit de montrer que si l'on impose $(a_i, a_j) = (a_j, \beta D) = 1$ pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant r$, alors

$$\frac{\check{\rho}(a_1,\dots,a_r)}{[a_1\kappa(a_1)\cdots a_r\kappa(a_r)]} \geqslant \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}. \tag{24}$$

Pour cela, on commence par noter comme dans la démonstration du Théorème 1, que lorsque $p \nmid \beta D$, alors pour tous $i \neq j$, on a $p \nmid (Q_i(n), Q_j(n))$. Donc lorsque $p \nmid \beta D$, si $p^\nu \| Q_j(n)$ pour un certain j, alors $p^\nu \| Q(n)$. La minoration (24) découle alors de la multiplicativité de $\check{\rho}$ et de (3).

Il reste à démontrer (8). Pour cela, on utilise entre autres le « W-trick » – technique introduite par Green [Gre05] – afin de gérer les conditions $(a_i, a_j) = 1$. Soit donc $w \geqslant 1$ un entier, que l'on fixera plus tard, et $W := \prod_{p \leqslant w} p$. On se donne par ailleurs $C \geqslant 1$, une autre quantité à fixer plus tard. Soit $y_1, \ldots, y_r \geqslant 2$. Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on introduit $y_j^* := \min(y_j, x^{\varepsilon_0/C})$ et on pose

$$\begin{aligned} L_j(\alpha) &:= \sum_{\substack{w < p \leqslant y_j^* \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)\varphi(p)p^\alpha}{p^2}, \qquad \left(0 \leqslant \alpha \leqslant (\log x)^{-\varepsilon_0/C}\right) \\ L_j &:= \sum_{\substack{w < p \leqslant y_j^* \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p}. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant \rho_j(p) \leqslant g_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, une sommation par parties fournit

$$L_j(\alpha) = L_j(0) + O(1) = L_j + O(1). \tag{25}$$

On démontre que la minoration (8) est valable pour les valeurs particulières

$$k_j := \lfloor L_j \rfloor. \qquad (1 \leqslant j \leqslant r) \tag{26}$$

Pour cela, on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 5. *Avec les notations ci-dessus, lorsque w et C sont suffisamment grands, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, uniformément pour $0 \leqslant k_j' \leqslant k_j$ on a*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} \asymp \frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!} \exp\left\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \right\}.$$

Démonstration. La majoration est aisée en remplaçant la condition $n \leqslant x^{\varepsilon_0}$ par $P^+(n) \leqslant x$. En effet, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} &\leqslant \frac{L_j(0)^{k_j'}}{k_j'!} \prod_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \left\{ 1 + \frac{\rho_j(p)}{p} \right\} \\ &\ll \frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!} \exp\left\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (25). On démontre maintenant la borne inférieure. Pour cela, on introduit les notations

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{P^+(n) \leqslant x^{\varepsilon_0/C} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2}, \qquad \Sigma_2 := \sum_{\substack{P^+(n) \leqslant x^{\varepsilon_0/C} \\ n > x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2},$$

de sorte que l'on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ \omega_{y_j}(n)=k'_j\\ (n,W\beta D)=1\\ \mu(n)^2=1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} \geqslant \Sigma_1 - \Sigma_2.$$

En utilisant l'astuce de Rankin, avec $\alpha := 1/\log\big(x^{\varepsilon_0/C}\big)$, on a

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\leqslant x^{-\alpha\varepsilon_0} \sum_{\substack{P^+(n)\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ \omega_{y_j}(n)=k'_j\\ (n,W\beta D)=1\\ \mu(n)^2=1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)n^\alpha}{n^2}\\
&\leqslant \mathrm{e}^{-C}\frac{L_j(\alpha)^{k'_j}}{k'_j!} \prod_{\substack{y_j^*<p\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ p\nmid W\beta D}} \left(1+\frac{\rho_j(p)(p-1)p^\alpha}{p^2}\right)\\
&\ll \mathrm{e}^{-C}\frac{L_j^{k'_j}}{k'_j!}\exp\Bigg\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid W\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on minore Σ_1 pour $k'_j \geqslant 1$ par

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\geqslant \Bigg(\frac{L_j(0)^{k'_j}}{k'_j!} + O\Bigg(\sum_{\substack{w<p\leqslant y_j^*\\ p\nmid\beta D}} \frac{1}{p^2}\frac{L_j(0)^{k'_j-1}}{(k'_j-1)!}\Bigg)\Bigg) \prod_{\substack{y^*<p\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ p\nmid W\beta D}}\left(1+\frac{\rho_j(p)(p-1)}{p^2}\right)\\
&\gg \Bigg(\frac{L_j^{k'_j}}{k'_j!} + O\Bigg(\frac{L_j^{k'_j-1}}{w(k'_j-1)!}\Bigg)\Bigg)\exp\Bigg\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid W\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\Bigg\}C^{-g_j}.
\end{aligned}$$

La même inégalité est valable sans le terme d'erreur dans la parenthèse pour $k'_j = 0$. Finalement, puisque $k'_j \leqslant L_j$, lorsque w et C sont assez grands, on obtient bien le lemme énoncé. $\square$

On peut désormais démontrer (8) pour le choix (26). Grâce au « W-trick », les conditions $(a_i, a_j) = 1$ sont négligeables lorsque w est assez grand. On introduit donc

$$\Sigma_3 := \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sum_{\substack{a_j\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ \omega_{y_j}(a_j)=k_j\\ (a_j,W\beta D)=1\\ \mu(a_j)^2=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}$$

et

$$\Sigma_4 := \sum_{\substack{d_{\mathcal{I}} \leqslant x^{\varepsilon_0} \quad (\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\llbracket 1,r \rrbracket), |\mathcal{I}| \geqslant 2) \\ \prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}} \neq 1 \\ (d_{\mathcal{I}}, W\beta D)=1 \\ \mu(d_{\mathcal{I}})^2=1}} \left(\prod_{\mathcal{J}} \frac{\prod_{j \in \mathcal{J}} \rho_j(d_{\mathcal{J}})}{d_{\mathcal{J}}^{|\mathcal{J}|}} \right) \times \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \sum_{\substack{a_j \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(a_j) = k_j - \sum_{\mathcal{J} \ni j} \omega_{y_j}(d_{\mathcal{J}}) \\ (a_j, W\beta D)=1 \\ \mu(a_j)^2=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2},$$

de sorte que

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ \omega_{y_j}(Q_j(n)) = k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M} y}{(\log x)^r} \left(\Sigma_3 - \Sigma_4 \right).$$

Dans la définition de Σ_4, les variables $d_{\mathcal{I}}$ encodent les relations de coprimalité entre les a_i pour $i \in \mathcal{I}$. Dire que les $a_1, \ldots, a_r$ ne sont pas tous premiers entre eux est exactement dire $\prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}} \neq 1$. Avec le Lemme 5, on a d'une part,

$$\Sigma_3 \gg \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{L_j^{k_j}}{k_j!} \exp\left\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \right\},$$

et d'autre part, puisque $\rho_j(p) \leqslant g$ et $k_j \leqslant L_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\Sigma_4 \ll \sum_{\substack{d_{\mathcal{I}} \leqslant x^{\varepsilon_0} \quad (\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\llbracket 1,r \rrbracket), |\mathcal{I}| \geqslant 2) \\ \prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}} \neq 1 \\ (d_{\mathcal{I}}, W\beta D)=1 \\ \mu(d_{\mathcal{I}})^2=1}} \left(\prod_{\mathcal{J}} \frac{g^{r\omega(d_{\mathcal{J}})}}{d_{\mathcal{J}}^{|\mathcal{J}|}} \right) \Sigma_3 \ll \frac{\Sigma_3}{\sqrt{w}}.$$

Ainsi, lorsque w est suffisamment grand, pour ce choix de $k_1, \ldots, k_r$ on obtient avec (4),

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ \omega_{y_j}(Q_j(n)) = k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M} y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{\varphi_j(\beta D) \mathrm{e}^{-M_j} \log x}{\beta D \sqrt{1 + L_j}},$$

et donc le résultat désiré. □

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement Régis de la Bretèche pour nos nombreuses discussions, ainsi que ses suggestions toujours éclairées.

Références

[BT18] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : A remark on Sarnak's conjecture. *Q. J. Math.*, à paraître, 2018. ↑ 5

[Gou17] É. Goudout : Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 115(3):599–637, 2017. ↑ 1

[Gre05] B. Green : Roth's theorem in the primes. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1609–1636, 2005. ↑ 12

[Hal75] G. Halász : On the distribution of additive arithmetic functions. *Acta Arith.*, 27:143–152, 1975. ↑ 1, 5

[Hen12] K. Henriot : Nair-Tenenbaum bounds uniform with respect to the discriminant. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 152(3):405–424, 2012. ↑ 11

[Hen14] K. Henriot : Nair-Tenenbaum uniform with respect to the discriminant–ERRATUM. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 157(2):375–377, 2014. ↑ 11

[Lan27] E. Landau : *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.* Teubner, Leipzig, 1927. ↑ 2

[Nag51] T. Nagell : *Introduction to number theory.* Wiley, 1951. ↑ 2

[Ste91] C. L. Stewart : On the number of solutions of polynomial congruences and Thue equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4):793–835, 1991. ↑ 2

[Ten90] G. Tenenbaum : Sur une question d'Erdős et Schinzel, in : A. Baker, B. Bollabás, A. Hajnal (eds.) *A Tribute to Paul Erdős. Cambridge University Press*, pages 405–443, 1990. ↑ 2

[Ten15] G. Tenenbaum : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Belin, quatrième édition, 2015. ↑ 6

[Ten17] G. Tenenbaum : Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes. *Ramanujan J.*, 44(3):641–701, 2017. ↑ 5

[Ten18] G. Tenenbaum : Note sur les lois locales conjointes de la fonction nombre de facteurs premiers. *J. Number Theory*, 188:88–95, 2018. ↑ 1, 2, 7, 8

Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 75013 Paris, France

E-mail : eliegoudout@hotmail.com