Théorème d'Erdős-Kac pour les translatés d'entiers ayant k facteurs premiers

Élie Goudout

Abstract

Let $x \geqslant 3$. For $1 \leqslant n \leqslant x$ an integer, let $\omega(n)$ be its number of distinct prime factors. We show that $\omega(n-1)$ satisfies an Erdős-Kac type theorem whenever $\omega(n) = k$ where $1 \leqslant k \ll \log\log x$, thus extending a result of Halberstam.

1 Présentation des résultats

Pour $k, n \geqslant 1$ deux entiers et $x \geqslant 1$ un réel, on note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n,

$$\mathcal{E}_k(x) := \{n \leqslant x : \quad \omega(n) = k\},$$

et $\pi_k(x) := \#\mathcal{E}_k(x)$. On s'intéresse à une variante du théorème suivant. On définit

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t. \qquad (y \in \mathbb{R})$$

Théorème (Erdős & Kac [EK39] ; Rényi & Turán [RT58])**.** *Uniformément pour $x \geqslant 3$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\#\left\{n \leqslant x : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\} = \Phi(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

Dans [FT96], Fouvry & Tenenbaum étudient la répartition de $\omega(n-1)$ lorsque n vérifie une condition de friabilité. On s'inspire de leur méthode pour étudier la répartition de $\omega(n-1)$ lorsque n a un nombre fixé de facteurs premiers. Le cas particulier où $n = p$ est premier a été traité par Halberstam [Hal56]. Pour $x \geqslant 3$, $y \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant 1$ un entier, on définit

$$\pi_k(x, y) := \#\left\{n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\}.$$

Théorème 1. *Soit $R > 0$ fixé. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant R\log_2 x$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\pi_k(x, y) = \pi_k(x)\left\{\Phi(y) + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right\}.$$

On démontre ce théorème par la méthode des fonctions caractéristiques et l'inégalité de Berry-Esseen. On obtient le même terme d'erreur que Fouvry & Tenenbaum. Dans les deux cas, on néglige la contribution des grands facteurs premiers de $n - 1$ pour des raisons techniques, liées à la répartition de l'ensemble étudié dans les grandes progressions arithmétiques. C'est pour cela qu'on n'obtient pas le terme d'erreur $O((\log_2 x)^{-1/2})$ espéré.

En utilisant l'idée de Selberg pour estimer $\pi_k(x)$, l'étude directe de la série génératrice adéquate nous permet aussi de démontrer le théorème suivant, qui localise le nombre de

« petits » facteurs premier de $n-1$, lorsque $n\in\mathcal{E}_k(x)$. Pour $k\geqslant 1$, $\ell\geqslant 0$ et $1\leqslant w\leqslant x$, on note

$$\omega(n,w) := \sum_{\substack{p\mid n\\ p\leqslant w}} 1, \qquad (n\geqslant 1)$$
$$\pi_{k,\ell}(x,w) := \#\left\{n\in\mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1,w)=\ell\right\}.$$

Théorème 2. *Il existe une constante absolue $\eta>0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit $R\geqslant 1$ fixé quelconque. Uniformément pour $3\leqslant w\leqslant x^{\eta(\log_3 x)/(R^2\log_2 x)}$, $1\leqslant k\leqslant R\log_2 x$ et $0\leqslant \ell\leqslant R\log_2 w$, on a*

$$\pi_{k,\ell}(x,w) = \pi_k(x)\frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell!\log w}\left\{h_k\left(\frac{\ell}{\log_2 w}\right)+O\left(\frac{k}{(\log_2 x)^2}+\frac{\ell+1}{(\log_2 w)^2}\right)\right\}, \tag{1}$$

où h_k est la fonction entière définie par

$$h_k(z) := \mathrm{e}^{\gamma(z-1)}\prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{z-1}{p+(k-1)/\log_2 x-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z-1}. \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{2}$$

Ce théorème est non trivial uniquement lorsque w est suffisamment grand. Le cas des petites valeurs de w peut être traité via un léger ajustement de la preuve, par l'utilisation de (3). On note que lorsque $k=1$ et $\ell=0$, le terme principal est nul, ce qui est normal puisque 2 divise tous les $p-1$ pour $p\geqslant 3$. De manière général, lorsque $k/\log_2 x+\ell/\log_2 w$ est petit, le facteur local du système $(n,n-1)$ a un impact important.

2 Étude de la série génératrice

On étudie la série génératrice associée au membre de gauche de (1), dans le but d'utiliser la méthode de Selberg. Cela nous permet, dans la dernière section, de démontrer les théorèmes 1 et 2.

2.1 Moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$

Le premier lemme que l'on démontre se déduit simplement de la méthode de Selberg-Delange, telle qu'exposée dans [Ten15]. Étant donnés $x\geqslant 2$, $N\geqslant 0$ et $c_1,c_2>0$, on définit

$$R_N(x) := R_N(x;c_1,c_2) := \mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log x}}+\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}.$$

Lemme 3. *Soit $0<\varepsilon<1$ et $A,R>0$ fixés. Il existe des constantes $c_1,c_2>0$, pouvant dépendre de R, vérifiant l'énoncé suivant. Uniformément pour $N\geqslant 0$, $|\kappa|\leqslant A$, $x\geqslant 3$, $1\leqslant k\leqslant |\kappa|R\log_2 x$ et f une fonction multiplicative vérifiant*

(i) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2}\frac{|f(p)-\kappa|}{p^{1-\varepsilon}}\leqslant A,$

(ii) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{|f(p^\nu)|}{p^{\nu(1-\varepsilon)}}\leqslant A,$

on a

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} f(n) = \frac{x}{\log x}\left\{\sum_{0\leqslant j\leqslant N}\frac{Q_{f,\kappa,j,k}(\kappa\log_2 x)}{(\log x)^j}+O\left(\frac{(|\kappa|\log_2 x)^k}{k!}R_N(x)\right)\right\}, \tag{3}$$

où les polynômes $Q_{f,\kappa,j,k}$ sont explicites, de degré au plus $k-1$ et ne dépendent que de κ, f, j et k. De plus, en notant $r := (k-1)/(\kappa \log_2 x)$, on a

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} f(n) = \frac{x}{\log x}\frac{(\kappa\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda_{f,\kappa}(r) - \frac{r\lambda''_{f,\kappa}(r)}{2\log_2 x} + O\left(\frac{k^2}{(\kappa\log_2 x)^4}\right)\right\}, \tag{4}$$

où $\lambda_{f,\kappa}$ est la fonction entière définie par

$$\lambda_{f,\kappa}(z) := \frac{\kappa}{\Gamma(\kappa z+1)}\prod_{p\geqslant 2}\left(1 + z\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa z}. \qquad (z\in\mathbb{C})$$

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Pour $z \in \mathbb{C}$, on introduit, lorsque cela a un sens, les séries de Dirichlet

$$F(s) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{\omega(n)}f(n)}{n^s},$$

$$G(s;z) := F(s)\zeta(s)^{-\kappa z} = \prod_{p\geqslant 2}\left(1 + z\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\kappa z}.$$

En notant $b(n)$ les coefficients de la série $G(\cdot;z)$, pour tous $p \geqslant 2$ et $\nu \geqslant 1$, on a

$$b(p^\nu) = \binom{\nu-1-\kappa z}{\nu} + z\sum_{0\leqslant\mu<\nu} f(p^{\nu-\mu})\binom{\mu-1-\kappa z}{\mu}.$$

En particulier, $b(p) = z(f(p) - \kappa)$. Lorsque $|z| \leqslant R$, en utilisant la majoration

$$\binom{\mu-1-\kappa z}{\mu} \ll (1+\mu)^{1+|\kappa z|},$$

avec ε qui vérifie (i) et (ii), on obtient uniformément

$$\sum_{p\geqslant 2}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|b(p^\nu)|}{p^{\nu(1-\varepsilon/3)}} < +\infty.,$$

L'estimation (3) se déduit alors des théorèmes II.1.3 et II.5.2 de [Ten15], puis d'une version très légèrement modifiée – afin tenir compte du paramètre κ – de la preuve de [Ten15, th. II.6.3]. On en déduit (4) avec $N = 0$, en effectuant un développement asymptotique de

$$Q_{f,\kappa,0,k}(X) = \sum_{m+\ell=k-1}\frac{1}{m!\ell!}\lambda_{f,\kappa}^{(m)}(0)X^\ell$$

à deux termes, conformément à la note de fin du chapitre II.6 de [Ten15]. □

2.2 Calcul de la série génératrice

Pour $1 \leqslant w \leqslant x$ et $k \geqslant 1$, on définit

$$f_k(z) := \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} z^{\omega(n-1,w)}. \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{5}$$

On omet les variables w et x de la notation afin de l'alléger. On rappelle aussi la définition (2) de h_k.

Lemme 4. *Il existe une constante $\eta > 0$ absolue vérifiant l'énoncé suivant. Soit $R \geqslant 1$ fixé. Uniformément pour $3 \leqslant w \leqslant x$, $1 \leqslant k \ll R\log_2 x$ et $|z| \leqslant R$, avec $r := (k-1)/\log_2 x$ et $u := (\log x)/\log w$, on a*

$$\begin{aligned} f_k(z) = \pi_k(x)(\log w)^{z-1}\bigg\{h_k(z) + \frac{r\xi(z)}{\log_2 x} + O\bigg(\frac{k^2}{(\log_2 x)^4} + \frac{1}{\log w}\bigg)\bigg\} \\ + O\big(xu^{-\eta u}(\log x)^{2R} + x^{9/10}\big), \end{aligned} \tag{6}$$

pour une fonction entière ξ explicite, pouvant dépendre des paramètres w, x et k, admettant 1 pour zéro et uniformément bornée pour $|z| \leqslant R$.

On note qu'il est possible d'obtenir un développement asymptotique beaucoup plus précis de $f_k(z)$, de manière analogue à (3). La présence du terme d'ordre $r/\log_2 x$ nous est utile dans la démonstration du Théorème 1.

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé et on introduit la fonction multiplicative g_z définie par

$$g_z(n) := \mu(n)^2(z-1)^{\omega(n)}. \qquad (n \geqslant 1)$$

Puisque l'on a $1 * g_z = z^{\omega(\cdot)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} \sum_{\substack{q\mid n-1\\ P^+(q)\leqslant w}} g_z(q) \\ &= \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ P^+(q)\leqslant w}} g_z(q) \sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ n\equiv 1[q]}} 1 + R_1, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R_1 := \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} 1 \sum_{\substack{q>x^{1/3}\\ q\mid n-1\\ P^+(q)\leqslant w}} g_z(q).$$

Pour $n \geqslant 1$, on note

$$n_w := \prod_{\substack{p^\nu \| n\\ p\leqslant w}} p^\nu$$

la partie w-friable de n. Dans R_1, la deuxième somme est non vide seulement lorsque $(n-1)_w > x^{1/3}$, et dans ce cas, on a $(1 * |g_z|)(n-1) \leqslant (R+2)^{\omega(n-1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n_w>x^{1/3}}} (R+2)^{\omega(n)} \ll \sum_{\substack{x^{1/3}<a\leqslant x\\ P^+(a)\leqslant w}} \sum_{\substack{b\leqslant x/a\\ P^-(b)>w}} (R+2)^{\omega(a)+\omega(b)} \\ &\ll \frac{x}{\log x}\left(\frac{\log x}{\log w}\right)^{R+2} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n_w>x^{1/3}}} \frac{(R+2)^{\omega(a)}}{a}. \end{aligned}$$

Or, avec l'astuce de Rankin, pour tout $\alpha \in [0, 1/2]$, on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n_w>x^{1/3}}} \frac{(R+2)^{\omega(a)}}{a} \ll x^{-\alpha/3} \exp\bigg((R+2)\sum_{p\leqslant w} \frac{1}{p^{1-\alpha}-1}\bigg).$$

Avec [Ten84, lem. 2] et $\alpha = \min\big(\log(2u)/\log w, 1/2\big)$, il vient $R_1 \ll xu^{-\eta u}(\log x)^{2R} + x^{9/10}$ pour une certaine constante absolue $\eta > 0$. En posant

$$R_2 := \sum_{\substack{q \leqslant x^{1/3} \\ P^+(q) \leqslant w}} g_z(q) \Bigg(\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ n \equiv 1[q]}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ (n,q)=1}} 1 \Bigg),$$

$$R_3 := \sum_{\substack{q > x^{1/3} \\ P^+(q) \leqslant w}} \frac{g_z(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ (n,q)=1}} 1,$$

on obtient

$$f_k(z) = \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \nmid n}} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) + R_1 + R_2 - R_3. \tag{7}$$

De manière analogue à R_1, avec l'astuce de Rankin on a $R_3 \ll xu^{-\eta u}(\log x)^{2R} + x^{9/10}$. On majore R_2 avec [WZ93, th. 1] (pour un résultat analogue sur Ω, voir [TK94]). On obtient, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} R_2 &\ll_A \Bigg(\sum_{q \leqslant x^{1/3}} |g_z(q)|^2 \Bigg| \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ n \equiv 1[q]}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ (n,q)=1}} 1 \Bigg| \Bigg)^{1/2} \frac{\pi_k(x)^{1/2}}{(\log x)^A} \\ &\ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \Bigg(\sum_{q \leqslant x^{1/3}} \frac{(R+1)^{2\omega(q)}}{\varphi(q)} \Bigg)^{1/2} \\ &\ll_A \frac{x}{(\log x)^{A-R-1}} \\ &\ll \pi_k(x)(\log w)^{\Re\mathrm{e}\, z - 2}. \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que $|p+z-2| > 1/3$ pour tout $p \geqslant 2$. Afin d'estimer la somme de (7), on considère la fonction multiplicative f définie par

$$f(n) := \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \mid n}} \frac{p-1}{p+z-2}. \tag{8}$$

Puisqu'elle vérifie les hypothèses du Lemme 3 pour $\kappa = 1$, avec (4) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \nmid n}} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) &= \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{p \leqslant w} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) \\ &\quad \times \left\{ \lambda_z(r) - \frac{r\lambda_z''(r)}{2\log_2 x} + O\left(\frac{k^2}{(\log_2 x)^4}\right) \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $r := (k-1)/\log_2 x$ et

$$\lambda_z(r) := \prod_{p \leqslant w} \left(1 + \frac{r}{p+z-2}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r \prod_{p > w} \left(1 + \frac{r}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r.$$

On pose *a priori*

$$\xi(z) := \frac{h_k(z)\lambda_1''(r)}{2\lambda_1(r)} - \frac{\lambda_z''(r)}{2\lambda_1(r)} (\log w)^{1-z} \prod_{p \leqslant w} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right).$$

Cela définit une fonction entière, admettant 1 pour zéro et bornée uniformément en w, x et k sous les conditions de l'énoncé. En effet, les pôles de $z \mapsto \lambda_z''(r)$ sont compensés par les zéros du produit eulérien et $\lambda_1(r) \asymp 1$ pour $0 \leqslant r \leqslant R$. On en déduit l'estimation désirée pour $f_k(z)$ puisque l'on a d'une part,

$$\pi_k(x) = \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ \lambda_1(r) - \frac{r\lambda_1''(r)}{2\log_2 x} + O\left(\frac{k^2}{(\log_2 x)^4} \right) \right\},$$

et d'autre part,

$$(\mathrm{e}^\gamma \log w)^{z-1} \prod_{p \leqslant w} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z-1} = 1 + O\left(\frac{1}{\log w}\right),$$

d'après la troisième formule de Mertens, uniformément pour $|z| \leqslant R$.

Pour compléter la preuve, on traite le cas où il existe un p_0 tel que $|p_0 + z - 2| \leqslant 1/3$. Puisque la définition (8) n'est plus nécessairement valide, on traite spécifiquement le facteur eulérien de p_0 dans (7). Pour cela, on écrit

$$\prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \nmid n}} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) = \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \neq p_0}} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) \left\{ \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \mid n \\ p \neq p_0}} \frac{p-1}{p+z-2} + \mathbb{1}_{p_0 \nmid n} \frac{z-1}{p_0 - 1} \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \mid n}} \frac{p-1}{p+z-2} \right\},$$

qui est une combinaison linéaire de deux fonctions multiplicatives vérifiant les hypothèses du Lemme 3, uniformément en p_0 et $|z| \leqslant R$. La même utilisation du Lemme 3 que précédemment permet alors de conclure par un calcul analogue. □

3 Lois locales et répartition

On démontre le Théorème 2, puis le Théorème 1.

Démonstration du Théorème 2. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. La quantité $\pi_{k,\ell}(x, w)$ correspond au coefficient de x^ℓ dans $f_k(z)$, qui est

$$\pi_{k,\ell}(x, w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=\rho} \frac{f_k(z)}{z^{\ell+1}} \mathrm{d}z,$$

pour tout $\rho > 0$. Pour la démonstration, on majore

$$\frac{r\xi(z)}{\log_2 x} \ll \frac{k}{(\log_2 x)^2}.$$

En posant

$$Q(X) := \sum_{a+b=\ell} \frac{h_k^{(a)}(0) X^b}{a!b!},$$

le terme principal vaut

$$\frac{\pi_k(x)}{\log w} Q(\log_2 w).$$

Comme il est détaillé dans la preuve de [Ten15, th. II.6.3(6.13)], puisque $|h_k''(z)| \ll 1$ pour $|z| \leqslant R$ uniformément en k, on a

$$Q(\log_2 x) = \frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell!} \left\{ h_k\left(\frac{\ell}{\log_2 w}\right) + O\left(\frac{\ell}{(\log_2 w)^2}\right) \right\}.$$

Il suffit donc de traiter le terme d'erreur de (6). Le cas $\ell = 0$ est trivial. Lorsque $\ell \geqslant 1$, d'après la majoration de [Ten15, II.(6.14)], avec $\rho := \ell/\log_2 w$, on a

$$\oint_{|z|=\rho} (\log w)^{\Re e\, z}|z|^{-\ell-1}|\mathrm{d}z| \ll \frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell!}.$$

Pour conclure, puisque $R \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant R\log_2 x$, il suffit de remarquer que

$$\pi_k(x)\frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell!\log w}\left(\frac{k}{(\log_2 x)^2}+\frac{\ell+1}{(\log_2 w)^2}\right) \gg \frac{x}{(\log x)^{10R^2}}$$

dès que $\pi_k(x) > 0$. □

Démonstration du théorème 1. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. On suit essentiellement la démonstration de [FT96, cor. 5], en adaptant le raisonnement à notre problème. Pour toute la démonstration, on choisit

$$w := \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^2}\right), \tag{9}$$

et on se donne une constante $C > 0$, à fixer plus tard. Pour $x \geqslant 2$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned}\tilde\pi_k(x,y) &:= \#\left\{n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1,w) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\},\\ D_k(x) &:= \#\left\{n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1)-\omega(n-1,w) > C\log_3 x\right\}.\end{aligned}$$

On montre dans un premier temps que $\tilde\pi_k(x,y)$ est une bonne approximation de $\pi_k(x,y)$ lorsque C est suffisamment grand. Pour cela, on observe que l'on a,

$$\tilde\pi_k\Big(x, y-\frac{C\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Big) - D_k(x) \leqslant \pi_k(x,y) \leqslant \tilde\pi_k(x,y), \tag{10}$$

et on majore D_k. On utilise l'astuce de Rankin, afin de majorer, pour tout $n \leqslant x$,

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\omega(n-1)-\omega(n-1,w)>C\log_3 x} &\leqslant 2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,w)-C\log_3 x}\\ &\leqslant (\log_2 x)^{-C\log 2}\tau_2\Big(\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p>w}} p^\nu\Big).\end{aligned}$$

D'après [Lan89], pour tous $\delta > 0$ et $n \geqslant 1$, on a

$$\tau_2(n) \ll_\delta \sum_{\substack{q|n\\ q\leqslant n^\delta}} \tau_2(q)^{1/\delta}.$$

Avec $\delta = 1/3$, en posant

$$R_4 := (\log_2 x)^{-C\log 2}\sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ P^-(q)>w}} \tau_2(q)^3\Bigg(\sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ n\equiv 1[q]}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ (n,q)=1}} 1\Bigg),$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
D_k(x) &\ll (\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ P^-(q)>w}} \tau_2(q)^3 \sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ n\equiv 1[q]}} 1\\
&\ll (\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ (q,n)=1\\ P^-(q)>w}} \frac{\tau_2(q)^3}{\varphi(q)} + R_4\\
&\ll \frac{\pi_k(x)}{(\log_2 x)^{C\log 2}} \left(\frac{\log x}{\log w}\right)^8 + R_4\\
&\ll \frac{\pi_k(x)}{\log_2 x}, \qquad (11)
\end{aligned}$$

lorsque C est suffisamment grand, où l'on a majoré R_4 de manière analogue à R_2 dans la section 2.2.

Il suffit donc d'estimer $\tilde{\pi}_k(x,y)$. On utilise pour cela la méthode des fonctions caractéristiques. Pour des raisons techniques, en notant

$$\tilde{\pi}_k^\star(x,y) := \#\left\{n\in\mathcal{E}_k(x) \ : \quad \omega(n-1,w)\leqslant \log_2 w + y\sqrt{\log_2 w}\right\},$$

on montre en fait

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\tilde{\pi}_k^\star(x,y) - \pi_k(x)\Phi(y)| \ll \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}.$$

Cela est suffisant puisque $\log_2 w = \log_2 x + O(\log_3 x)$ avec (9). D'après l'inégalité de Berry-Esseen telle qu'énoncée dans [Ten15], en posant $T := \log_2 w$, avec la notation (5) on a

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\tilde{\pi}_k^\star(x,y) - \pi_k(x)\Phi(y)| \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{T}} + \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} \left|\mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right| \frac{\mathrm{d}t}{|t|}. \qquad (12)$$

Pour $\vartheta\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{i\vartheta} = 1 + O(\vartheta)$. Ainsi, lorsque $|t|\leqslant 1/\log x$,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right| &\ll \frac{|t|}{\sqrt{T}} \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} |\omega(n-1,w) - T| + |t|^2\pi_k(x)\\
&\ll |t|\pi_k(x)\left(\frac{\log w}{\sqrt{T}} + \sqrt{T} + |t|\right),
\end{aligned}$$

où l'on a majoré trivialement $\omega(n-1,w)\ll \log w$. On a donc

$$\int_{-1/\log x}^{1/\log x} \left|\mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right| \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{T}}. \qquad (13)$$

Pour $1/\log x\leqslant |t|\leqslant T^{1/6}$, avec le Lemme 4, puisque $h_k(1) = 1$ et $\xi(1) = 0$, on a

$$f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) = \pi_k(x)\mathrm{e}^{it\sqrt{T}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\left\{1 + O\left(\frac{|t|+|t|^3}{\sqrt{T}} + \frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}.$$

Par ailleurs, en vertu de l'inégalité $\cos(\vartheta) - 1\leqslant -2\vartheta^2/\pi^2$, valable pour $-1\leqslant\vartheta\leqslant 1$, lorsque $T^{1/6} < |t|\leqslant\sqrt{T}$, le Lemme 4 fournit la majoration

$$f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) \ll \pi_k(x)\mathrm{e}^{-2t^2/\pi^2}.$$

On obtient donc

$$\int_{1/\log x<|t|\leqslant\sqrt{T}} \left| \mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2} \right| \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{T}}. \tag{14}$$

Le résultat découle finalement des inégalités (10) à (14). Il est possible d'obtenir un développement asymptotique plus précis pour $\pi_k^*(x,y)$. Malheureusement, cela ne permet pas d'améliorer le Théorème 1. □

Remerciements. Je remercie Sary Drappeau et Berke Topacogullari pour m'avoir présenté ce sujet et pour nos discussions. Je remercie également Régis de la Bretèche pour ses précieuses suggestions.

Références

[EK39] P. Erdős et M. Kac : On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 25:206–207, 1939. ↑ 1

[FT96] É. Fouvry et G. Tenenbaum : Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(3):481–514, 1996. ↑ 1, 7

[Hal56] H. Halberstam : On the distribution of additive number-theoretic functions. III. *J. London Math. Soc.*, 31:14–27, 1956. ↑ 1

[Lan89] B. Landreau : A new proof of a theorem of van der Corput. *Bull. London Math. Soc.*, 21(4):366–368, 1989. ↑ 7

[RT58] A. Rényi et P. Turán : On a theorem of Erdős-Kac. *Acta Arith.*, 4:71–84, 1958. ↑ 1

[Ten84] G. Tenenbaum : Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné. *Compositio Math.*, 51(2):243–263, 1984. ↑ 5

[Ten15] G. Tenenbaum : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Belin, quatrième édition, 2015. ↑ 2, 3, 6, 7, 8

[TK94] N. M. Timofeev et M. B. Khripunova : Distribution of numbers with a given number of prime factors in progressions. *Math. Notes*, 55(1-2):204–212, 1994. ↑ 5

[WZ93] D. Wolke et T. Zhan : On the distribution of integers with a fixed number of prime factors. *Math. Z.*, 213(1):133–144, 1993. ↑ 5

Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 75013 Paris, France

E-mail : eliegoudout@hotmail.com