ACTA ARITHMETICA
Online First version

Théorème d'Erdős–Kac dans presque tous les petits intervalles

par

Élie Goudout (Paris)

1. Introduction. Pour $n \geq 1$, on note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n. Cette fonction admet la fonction $n \mapsto \log_2 n$ comme ordre normal ([1]). En 1939, Erdős et Kac montrent que la répartition de ω suit une loi normale. En 1958, Rényi et Turán améliorent leur résultat de la manière suivante.

Théorème (Erdős & Kac [4] ; Rényi & Turán [11]). *Uniformément pour $X \geq 20$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{X}\#\big\{1 \leq n \leq X : \omega(n) \leq \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\big\} = \Phi(y) + O\bigg(\frac{1}{\sqrt{\log_2 X}}\bigg),$$

où

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\tau^2/2}\,d\tau. \tag{1}$$

Comme précisé dans [12, après le théorème III.4.15], le terme d'erreur, s'il est indépendant de y, est optimal. En 1981, Babu [1] a montré que le même résultat (sans terme d'erreur) est valable dans tous les intervalles $(x, x+h]$ lorsque $y \in \mathbb{R}$ est fixé et dès que $h \geq x^{a(x)/\sqrt{\log_2 x}}$, où $a(x) \to +\infty$. Dans [10], Plaksin montre que lorsque h tend vers l'infini arbitrairement lentement avec x, le résultat se vérifie dans presque tous les intervalles $(x, x+h]$. On démontre le même résultat par une méthode différente, en fournissant de plus une majoration explicite du terme d'erreur. Delange [3] a montré que

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N25.
Key words and phrases: Erdős–Kac, short intervals, prime factors, arithmetic functions.
Received 23 March 2016; revised 28 July 2017.
Published online *.

([1]) Pour $k \geq 2$, $\log_k$ désigne la fonction log itérée k fois. Par exemple, $\log_2 x = \log\log x$.

DOI: 10.4064/aa8480-11-2017

le $O((\log_2 X)^{-1/2})$ peut être remplacé par

$$\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi\log_2 X}}\left(\frac{2}{3}-c_1-\frac{y^2}{6}-\left\langle \log_2 X+y\sqrt{\log_2 X}\right\rangle\right)+O\left(\frac{1}{\log_2 X}\right),$$

où

$$c_1 := \gamma+\sum_p\left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)\simeq 0{,}261497 \tag{2}$$

est la constante de Mertens, et $\langle t\rangle$ désigne la partie fractionnaire de $t\in\mathbb{R}$. Ce résultat peut être retrouvé par les méthodes développées par Esseen dans sa thèse [5, pp. 53–59], avec un terme d'erreur légèrement plus faible.

Pour $20\le h\le X$, $x\in[X,2X]$ et $y\in\mathbb{R}$, on définit

$$F_{(x,x+h]}(y) := \frac{1}{h}\#\left\{x<n\le x+h : \omega(n)\le \log_2 X+y\sqrt{\log_2 X}\right\}, \tag{3}$$

$$\Phi_X(y) := \Phi(y)+\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi\log_2 X}}\left(\frac{2}{3}-c_1-\frac{y^2}{6}-\left\langle \log_2 X+y\sqrt{\log_2 X}\right\rangle\right). \tag{4}$$

Théorème 1. *Uniformément pour* $20\le h\le X$ *et* $\alpha\ge 1$, *on a*

$$\|F_{(x,x+h]}-\Phi_X\|_\infty \ll \frac{\log_3 X}{\log_2 X}+\alpha^2\frac{(\log_2 h)^2}{\log h}$$

pour tout $x\in[X,2X]$ *sauf sur un ensemble de mesure au plus*

$$\ll X\left(\frac{1}{(\log h)^\alpha}+\frac{1}{(\log X)^{1/150}}\right).$$

Le paramètre $\alpha\ge 1$ pouvant varier uniformément, on peut diminuer la taille de l'ensemble exceptionnel au prix d'une légère perte sur le terme d'erreur, en prenant par exemple $\alpha=\log_2 h$. On note qu'il est possible, avec la méthode d'Esseen, d'augmenter la précision de Φ_X pour remplacer le $O(\log_3 X/\log_2 X)$ par $o((\log_2 X)^{-n/2})$ pour tout $n\ge 1$ fixé. On renvoie le lecteur intéressé à [5, pp. 60–61]. Il semble par ailleurs possible d'obtenir, pour presque tout x et y fixé, l'estimation $F_{(x,x+h]}(y)\sim\Phi(y)$ par la méthode des moments qui est plus élémentaire.

Comme l'a fait remarquer l'arbitre de cet article, il existe une infinité d'intervalles $[x,x+\log x/(\log_2 x)^2]$ ne vérifiant pas le théorème d'Erdős–Kac. En effet, soient $x\ge 20$, $r:=\log x/(3(\log_2 x)^2)$ et $w:=\lceil 2\log_2 x\rceil$. Pour $1\le i\le r$, soit $n_i:=\prod_{j=(i-1)w+1}^{iw}p_j$ (ici p_j désigne naturellement le j-ième nombre premier), de sorte que $\omega(n_i)=w$ et tous les n_i sont premiers deux à deux. D'après le théorème des nombres premiers, un simple calcul fournit $n_1\cdots n_{\lfloor r\rfloor}\le x$ pour x suffisamment grand. Ainsi, d'après le théorème chinois, pour tout x suffisamment grand, il existe un $N\in[x,2x]$ tel que $n_i\,|\,N+4i$ pour tout $1\le i\le r$. On a donc construit un intervalle de taille

$4\lfloor r\rfloor \geq \log x/(\log_2 x)^2$ dont au moins un quart des d'entiers a plus de $2\log_2 x$ facteurs premiers.

Pour $k \geq 1$, on note $\pi_k(x) := \#\{n \leq x : \omega(n) = k\}$. La bonne qualité du terme d'erreur du Théorème 1 permet de retrouver $\pi_k(x+h) - \pi_k(x)$ pour des k normaux et h suffisamment grand. Il est cependant possible de faire cela en s'intéressant directement aux lois locales.

THÉORÈME 2. *Soient $\varepsilon > 0$ fixé et $X \geq 20$. Soient $h \leq X$ et k un entier tels que*

$$|k - \log_2 X| \ll \sqrt{\log_2 X}, \tag{5}$$

$$h \geq \exp((\log_2 X)^{1/2+\varepsilon}). \tag{6}$$

Alors, pour presque tout $x \in [X, 2X]$, on a

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) \sim \frac{h}{\log X}\frac{(\log_2 X)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{7}$$

On peut aussi obtenir ce résultat lorsque $k \in [\delta \log_2 X, (e-\delta)\log_2 X]$ pour $\delta > 0$ fixé, ce que le Théorème 1 ne nous permet pas de faire, mais la borne inférieure sur h est alors bien moins bonne. On obtient en effet la condition $h \geq \exp((\log X)^{r\log r - r + 1 + \varepsilon})$ où l'on a posé $r := k/\log_2 X$ et $\varepsilon > 0$ est fixé. La relation $\pi_{\lfloor \log_2 x\rfloor}(x) \asymp x/\sqrt{\log_2 x}$ suggère que la condition (6) peut être remplacée par $h/\sqrt{\log_2 X} \to +\infty$. Le travail dans [7] permet de vérifier cela.

Pour montrer les deux théorèmes, l'ingrédient principal est la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *Uniformément pour tous $A, B > 1$, pour toute fonction $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable, pour tous $3 \leq h \leq X$ et pour tout $\delta > 0$, si l'on pose $I_{A,B} = [-A, -1/B] \cup [1/B, A]$, alors*

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x<n\leq x+h} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X<n\leq 2X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \ll \log(AB)\left(\delta + \frac{\log_2 h}{\log h}\right) \tag{8}$$

et

$$\int_{|z|=1} \left| \frac{1}{h} \sum_{x<n\leq x+h} z^{\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X<n\leq 2X} z^{\omega(n)} \right| |dz| \ll \delta + \frac{\log_2 h}{\log h} \tag{9}$$

pour tout $x \in [X, 2X]$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X\left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 h^{\delta/25}} + \frac{1}{\delta^2(\log X)^{1/50}}\right).$$

Cette proposition, qui est montrée à la section 6.1, découle d'un résultat récent et révolutionnaire de Matomäki et Radziwiłł [8]. L'enjeu est de montrer que presque partout, la moyenne de la fonction arithmétique $n \mapsto e^{i\vartheta\omega(n)}$ sur $(x, x+h]$ est proche de sa moyenne sur $[X, 2X]$. Dans [8], Matomäki et Radziwiłł traitent le cas des fonctions multiplicatives réelles, et précisent que le champ d'application peut être étendu de diverses manières, notamment au cas des fonctions qui ne sont pas « p^{it}-simulatrices » (*pretentious* en anglais, notion développée depuis quelques années par Granville, Soundararajan, et d'autres auteurs). Ainsi, dans [9], Matomäki, Radziwiłł et Tao ont montré que la moyenne d'une fonction multiplicative complexe de module inférieur à 1 et non « p^{it}-simulatrice » était nulle sur presque tous les petits intervalles. Cependant, dans notre cas, lorsque ϑ tend vers 0 la moyenne n'est plus nulle. On est donc amené à comparer la moyenne sur les petits intervalles à celle sur un intervalle dyadique $[X, 2X]$. Par ailleurs, les intégrales nous amènent à passer par une estimation plus forte sur un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $[X, 2X]$, comme dans [8].

On termine cette introduction en mentionnant un résultat récent de Teräväinen [13], qui a montré que pour tout $k \geq 3$ fixé et $\varepsilon > 0$, presque tout intervalle $[x, x + (\log x)^{1+\varepsilon}]$ contient un entier n tel que $\omega(n) = k$.

2. Notations. La lettre p est réservée aux nombres premiers. Par conséquent, on écrit par exemple $\sum_p$ au lieu de $\sum_{p \text{ premier}}$. La lettre ω désigne la fonction additive qui compte le nombre de facteurs premiers distincts : $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$. Si E est un ensemble fini, on note $\#E$ son cardinal. On écrit $f \ll g$ ou $f = O(g)$ (resp. $f \gg g$) pour dire qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que $|f| \leq C|g|$ (resp. $|f| \geq C|g|$). La région de validité de cette inégalité, si elle n'est pas précisée, est claire d'après le contexte. On écrit par exemple $\ll_\varepsilon$ ou O_ε pour signifier que la constante implicite C peut dépendre de ε. La relation $f \asymp g$ signifie que l'on a simultanément $f \ll g$ et $f \gg g$. On utilise la notation (asymétrique) $a \sim b$ pour dire $b < a \leq 2b$.

3. Quelques lemmes classiques. Pour montrer le Théorème 1, on reprend essentiellement la preuve du théorème d'Erdős–Kac qui figure dans [12, théorème III.4.15]. Celle-ci repose principalement sur l'estimation de la somme des $e^{i\vartheta\omega(n)}$ et sur l'inégalité de Berry–Esseen, qui permet de relier les fonctions de répartition à leur fonction caractéristique. Cependant, Φ_X n'est pas exactement une fonction de répartition, elle contient même des discontinuités (défaut qui a été introduit afin d'avoir un meilleur terme d'erreur) ; on utilise alors des travaux de la thèse d'Esseen, qui permettent de contourner le problème.

Lemme 4. *Soit $m > 0$ un réel fixé. Soit F une fonction de répartition et f sa fonction caractéristique définie par*

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x}\, dF(x).$$

Soit G une fonction réelle à variation bornée sur $\mathbb{R}$, de fonction caractéristique g. On suppose les faits suivants vérifiés :

- *$F(-\infty) = G(-\infty)$ et $F(+\infty) = G(+\infty)$;*
- *si G est discontinue en deux points x et y distincts, alors $|x-y| > m$;*
- *G est dérivable en tout point de continuité, de dérivée bornée en valeur absolue par $\|G'\|_\infty$;*
- *F ne peut être discontinue en x que si G l'est aussi.*

Alors pour tout $T \gg 1/m$, on a

$$\|F - G\|_\infty \ll \frac{\|G'\|_\infty}{T} + \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| d\tau. \tag{10}$$

Démonstration. Voir [5, Theorem II.2.b, p. 32]. ∎

Avant de procéder à la démonstration du Théorème 1, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 5. *Pour $X \geq 20$, on a*

$$\frac{1}{X} \sum_{n\sim X} |\omega(n) - \log_2 X| \ll \sqrt{\log_2 X}.$$

Démonstration. Cette inégalité, qui est initialement due à Turán, est une application directe de l'inégalité de Turán–Kubilius, dont la démonstration se trouve par exemple dans [12, théorème III.3.1]. ∎

Lemme 6. *Uniformément pour $X \geq 3$ et $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{X} \sum_{X<n\leq 2X} e^{it\omega(n)} = A(e^{it})(\log X)^{e^{it}-1} + O((\log X)^{\cos t - 2}),$$

où $A(z) = 1 + c_1(z-1) + O((z-1)^2)$ dans la région $z - 1 = o(1)$, et c_1 est définie par (2).

Démonstration. Ceci se déduit facilement de [12, théorème II.6.1]. La constante c_1 apparaît comme la dérivée en 1 de la fonction entière

$$z \mapsto \Gamma(z)^{-1} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^z.$$

Pour la calculer, on utilise la relation $\Gamma'(1) = -\gamma$ [12, corollaire II.0.7]. ∎

4. Démonstration du Théorème 1. Soient $20 \leq h \leq X$ et $x \sim X$. On majore $\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\|_\infty$. On se restreint à $h \in \mathbb{N}$ pour des raisons qui apparaissent plus tard. Cela se fait au prix d'un $O(1/h)$ qui est négligeable. Dans le but d'utiliser l'inégalité d'Esseen, on introduit les fonctions caractéristiques, lorsque $x \sim X$ et $\tau \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
(11) \quad f_{(x,x+h]}(\tau) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y}\, dF_{(x,x+h]}(y) \\
&= \frac{1}{h} \sum_{x<n\leq x+h} e^{i\tau(\omega(n)-\log_2 X)/\sqrt{\log_2 X}},
\end{aligned}
$$

$$
(12) \qquad \phi_X(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y}\, d\Phi_X(y) = e^{-\tau^2/2}\left(1 + \frac{i\tau c_1 - i\tau^3/6}{\sqrt{\log_2 X}}\right) + \varDelta_X(\tau),
$$

où

$$
(13) \qquad \varDelta_X(\tau) := \frac{-i\tau}{2\pi\sqrt{\log_2 X}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi\nu \log_2 X}}{i\nu} e^{-(\tau+2\pi\nu\sqrt{\log_2 X})^2/2}.
$$

Le calcul pour $\phi_X(\tau)$ est aisé une fois connu le développement en série de Fourier

$$
\frac{1}{2} - \langle t\rangle = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi\nu t}}{2i\pi\nu} \qquad (t \notin \mathbb{N}).
$$

Pour simplifier, on note désormais $T := \log_2 X$. Soit $1 < A \leq T$. Avec le Lemme 4, on a alors

$$
(14) \qquad \|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\|_\infty \ll \frac{1}{A} + \int_{-A}^{A} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau.
$$

L'intégrale est traitée en deux parties. On se donne $B > 1$ et on étudie d'abord la contribution de l'intervalle $[-1/B, 1/B]$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $e^{iy} = 1 + O(y)$. Alors pour tous $x \sim X$ et $\tau \in \mathbb{R}$, en se rappelant que h est entier, on obtient

$$
f_{(x,x+h]}(\tau) = 1 + O\left(\frac{|\tau|}{\sqrt{T}\, h} \sum_{x<n\leq x+h} |\omega(n) - T|\right).
$$

Par ailleurs, pour $|\tau| \leq 1$ on a $\phi_X(\tau) = 1 + O(|\tau|)$. Alors

$$
I(x) := \int_{-1/B}^{1/B} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau \ll \frac{1}{B} + \frac{1}{B\sqrt{T}\, h} \sum_{x<n\leq x+h} |\omega(n) - T|,
$$

et donc

$$
\frac{1}{X}\int_{X}^{2X} I(x)\, dx \ll \frac{1}{B} + \frac{1}{B\sqrt{T}\, hX} \int_{X}^{2X} \sum_{x<n\leq x+h} |\omega(n) - T|\, dx.
$$

En intégrant par rapport à x, chaque $|\omega(n) - T|$ pour $n \in (X, 2X + h]$ apparaît moins de h fois. Ainsi, avec le Lemme 5, comme $h \le X$ on obtient

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} I(x)\, dx \ll \frac{1}{B}.$$

De cette façon, pour tout $\delta_1 > 0$, on a la majoration

$$I(x) \ll \delta_1/B \tag{15}$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X/\delta_1. \tag{16}$$

On majore désormais la contribution des $\tau \in I_{A,B} := [-A, -1/B] \cup [1/B, A]$, à l'aide de (8) de la Proposition 3. Pour cela, on introduit, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$F_X(y) := \frac{1}{X} \#\{n \sim X : \omega(n) \le \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\}, \tag{17}$$

et sa fonction caractéristique, pour $\tau \in \mathbb{R}$,

$$f_X(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y}\, dF_X(y) = \frac{1}{X} \sum_{n \sim X} e^{i\tau(\omega(n) - \log_2 X)/\sqrt{\log_2 X}}. \tag{18}$$

Alors pour tout $x \sim X$,

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau \ll I_1(x) + I_2 \tag{19}$$

où

$$I_1(x) := \int_{I_{A,B}} |f_{(x,x+h]}(\tau) - f_X(\tau)| \frac{d\tau}{|\tau|}, \qquad I_2 := \int_{I_{T,B}} \left| \frac{f_X(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

puisque $A \le T$. Avec (8) de la Proposition 3, pour tout $\delta_2 > 0$ on a

$$I_1(x) \ll \log(AB) \left(\delta_2 + \frac{\log_2 h}{\log h} \right) \tag{20}$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta_2^2 h^{\delta_2/25}} + \frac{1}{\delta_2^2 (\log X)^{1/50}} \right). \tag{21}$$

Par ailleurs, uniformément pour $|\tau| \le T^{1/6}$, puisque

$$|\Delta_X(\tau)| \ll \frac{1}{(\log X)^{2\pi^2 - o(1)}},$$

avec (12) et le Lemme 6, un calcul élémentaire fournit

$$|f_X(\tau) - \phi_X(\tau)| \ll e^{-\tau^2/2} \frac{|\tau|^2 + |\tau|^6}{T} + \frac{1}{\log X}.$$

De plus, pour tout $|t| \leq \pi$, on a $\cos t - 1 \leq -2t^2/\pi^2$. Donc toujours avec le Lemme 6, pour tout $T^{1/6} \leq |\tau| \leq \pi\sqrt{T}$, on a

$$|f_X(\tau) - \phi_X(\tau)| \ll \exp\Big(-\frac{2}{\pi^2}\tau^2\Big). \tag{22}$$

Par conséquent,

$$I_2 \ll \frac{1}{T} + \frac{\log(TB)}{\log X} + \int_{\pi\sqrt{T}}^{T} \left|\frac{f_X(\tau) - \Delta_X(\tau)}{\tau}\right| d\tau. \tag{23}$$

Il reste à traiter la dernière intégrale. La fonction Δ_X est concentrée autour des multiples entiers de $2\pi\sqrt{T}$. C'est aussi le cas de la fonction f_X. On découpe alors cette intégrale en fonction de l'entier en question. On veut donc majorer, pour $1 \leq k \leq \sqrt{T}/(2\pi)$,

$$\begin{aligned} J_k &:= \int_{2\pi(k-1/2)\sqrt{T}}^{2\pi(k+1/2)\sqrt{T}} \left|\frac{f_X(\tau) - \Delta_X(\tau)}{\tau}\right| d\tau \\ &= \int_{-\pi\sqrt{T}}^{\pi\sqrt{T}} \left|\frac{f_X(2k\pi\sqrt{T}+u) - \Delta_X(2k\pi\sqrt{T}+u)}{2k\pi\sqrt{T}+u}\right| du. \end{aligned}$$

Concernant la somme Δ_X, seul le terme pour $\nu = -k$ contribue de manière non négligeable à J_k. Ce terme vaut, en $\tau = 2k\pi\sqrt{T} + u$,

$$\frac{2k\pi\sqrt{T}+u}{2\pi\sqrt{T}}\,\frac{e^{-2ik\pi T}}{k} e^{-u^2/2} = e^{-2ik\pi T} e^{-u^2/2}\Big(1 + \frac{u}{2k\pi\sqrt{T}}\Big).$$

Par ailleurs, $\tau \mapsto e^{i\tau\sqrt{T}} f_X(\tau)$ est $2\pi\sqrt{T}$-périodique. On a alors l'égalité $f_X(2k\pi\sqrt{T}+u) = e^{-2ik\pi T} f_X(u)$. Ainsi, on peut écrire

$$J_k \ll \frac{1}{k\sqrt{T}} \int_{-\pi\sqrt{T}}^{\pi\sqrt{T}} |f_X(u) - e^{-u^2/2}|\, du + \frac{1}{kT} + e^{-T},$$

où le dernier terme provient de la somme des termes $\nu \neq -k$. L'intégrale ci-dessus se majore de la même manière que précédemment, et on obtient alors $J_k \ll 1/(kT) + 1/\log X$. En sommant cette majoration et en injectant dans (23), il vient alors

$$I_2 \ll \frac{\log T}{T} + \frac{T\log(TB)}{\log X}. \tag{24}$$

Finalement, avec (14)–(16), (19)–(21) et (24), pour tous $\delta_1, \delta_2 > 0$ on a

$$\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\|_\infty \ll \frac{1}{A} + \frac{\log T}{T} + \frac{\delta_1}{B} + \log(AB)\Big(\delta_2 + \frac{\log_2 h}{\log h}\Big) + \frac{T\log(TB)}{\log X} \tag{25}$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X\Big(\frac{1}{\delta_1} + \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta_2^2 h^{\delta_2/25}} + \frac{1}{\delta_2^2(\log X)^{1/50}}\Big). \tag{26}$$

Pour finir, il suffit de choisir A, B, δ_1 et δ_2 convenablement. On se donne $\alpha \geq 1$. Dans le cas $\alpha \geq (\log X)^{1-2/150}$, le résultat est trivial puisque l'on a $\log h \leq \log X$ et $\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\|_\infty \ll 1$. Dans le cas $\alpha \leq (\log X)^{1-2/150}$ et $\log h/(\alpha \log_2 h) \leq (\log X)^{1/150}$, on choisit

$$A = \min(\log h, T), \quad B = (\log h)^{10\alpha+1}, \quad \delta_1 = (\log h)^{10\alpha}, \quad \delta_2 = 100\alpha\frac{\log_2 h}{\log h}.$$

Enfin, si $\log h/(\alpha \log_2 h) \geq (\log X)^{1/150}$, on choisit

$$A = T, \quad B = (\log X)^2, \quad \delta_1 = \log X, \quad \delta_2 = 100(\log X)^{-1/150}. \blacksquare$$

5. Démonstration du Théorème 2. Soient $k \geq 1$, $20 \leq h \leq X$ et $x \sim X$. Avec la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}\Big|\pi_k(x+h) - \pi_k(x) - \frac{h}{X}(\pi_k(2X) - \pi_k(X))\Big|& \\ = \Big|\frac{h}{2i\pi}\int_{|z|=1}\Big(\frac{1}{h}\sum_{x<n\leq x+h} z^{\omega(n)} - \frac{1}{X}\sum_{X<n\leq 2X} z^{\omega(n)}\Big)\frac{dz}{z^{k+1}}\Big|&.\end{aligned}$$

Ainsi, avec la majoration (9) de la Proposition 3 lorsque $\delta = 100\log_2 h/\log h$, on obtient

$$\Big|\pi_k(x+h) - \pi_k(x) - \frac{h}{X}(\pi_k(2X) - \pi_k(X))\Big| \ll h\frac{\log_2 h}{\log h} \tag{27}$$

pour presque tout $x \sim X$ lorsque h tend vers l'infini. Par ailleurs, un calcul élémentaire à partir de [12, théorème II.6.4] montre qu'uniformément pour $k = \log_2 X + O(\sqrt{\log_2 X})$, on a

$$\frac{\pi_k(2X) - \pi_k(X)}{X} \sim \frac{1}{\log X}\,\frac{(\log_2 X)^{k-1}}{(k-1)!} \asymp \frac{1}{\sqrt{\log_2 X}}. \tag{28}$$

On en déduit le résultat recherché lorsque $h \geq \exp((\log_2 X)^{1/2+\varepsilon})$ pour un certain $\varepsilon > 0$ fixé. $\blacksquare$

Comme précisé dans l'introduction, la preuve fonctionne pour tous les $k \in [\delta\log_2 X, (e-\delta)\log_2 X]$ avec $\delta > 0$ fixé, mais on obtient alors une moins bonne borne inférieure pour h.

6. Estimation du type Matomäki–Radziwiłł. La Proposition 3 se déduit de la Proposition 7 ci-dessous, qui est une conséquence directe de [8], et qu'on démontre à la section 6.2.

6.1. Première simplification : définition de l'ensemble $\mathcal{S}$ et rétrécissement de l'intervalle de sommation. Soit $X \geq 20$. La Proposition 3 découle d'une meilleure estimation sur un sous-ensemble dense $\mathcal{S}_X \subset [X, 2X]$ défini de la manière suivante. Soit $\eta \in (0, 1/6)$. On considère la suite d'intervalles $[P_j, Q_j]$ définis comme ceci :

- $1 \leq (\log Q_1)^{40/\eta} \leq P_1 \leq Q_1 \leq \exp\big(\sqrt{\log X}\big)$,
- $P_j = \exp(j^{4j}(\log Q_1)^{j-1}(\log P_1))$ pour $1 \leq j \leq J$,
- $Q_j = \exp(j^{4j+2}(\log Q_1)^j)$ pour $1 \leq j \leq J$,

où J est défini comme le plus grand j tel que $Q_j \leq \exp\big(\sqrt{\log X}\big)$. On a donc $J \ll \log_2 X/\log_3 X$. On définit alors $\mathcal{S}_X$ comme l'ensemble des entiers de $[X, 2X]$ qui contiennent au moins un facteur premier dans chacun des $[P_j, Q_j]$ pour $1 \leq j \leq J$. On remarque que

$$\frac{\log P_j}{\log Q_j} = \frac{1}{j^2}\frac{\log P_1}{\log Q_1} \qquad (1 \leq j \leq J),$$

et donc, par le lemme fondamental du crible, l'ensemble $[X, 2X] \smallsetminus \mathcal{S}_X$ a une densité $\ll \log P_1/\log Q_1$.

Proposition 7. *Soit $\eta \in (0, 1/6)$ fixé. Alors uniformément pour $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $2 \leq h \leq h_2 = X/(\log X)^{1/5}$, si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$ est défini comme ci-dessus et que l'on a $[P_1, Q_1] \subset [1, h]$, alors*

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\Bigg|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)}\Bigg|^2 dx \ll \frac{(\log h)^{1/3}}{P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{(\log X)^{1/50}}.$$

Cette proposition est l'analogue de ce que l'on obtient en combinant le lemme 14 et la proposition 1 de [8]. Elle est démontrée à la section 6.2.

On énonce maintenant deux lemmes qui nous permettent de vérifier que la Proposition 7 implique bien la Proposition 3.

Lemme 8. *Soit $X \geq 3$. Uniformément pour $x \sim X$, $X/(\log X)^{1/5} \leq y \leq X$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{y}\sum_{x<n\leq x+y} e^{i\vartheta\omega(n)} = \frac{1}{X}\sum_{n\sim X} e^{i\vartheta\omega(n)} + O((\log X)^{\cos\vartheta - 9/5}).$$

Démonstration. Ceci se déduit du Lemme 6. ∎

LEMME 9. *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tous* $3 \leq h_2 \leq X$, $x \sim X$ *et* $3 \leq P \leq Q \leq \exp(\sqrt{\log X})$ *on ait*

$$\#\Big\{x < n \leq x + h_2 : \Big(n, \prod_{P<p\leq Q} p\Big) = 1\Big\} = h_2 \prod_{P<p\leq Q}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) + O\big(X\exp\big(-c\sqrt{\log X}\big)\big).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de [6, Theorem 6.1] avec par exemple $D = X^{1/2}$ et $z = \exp\big(\sqrt{\log X}\big)$. ∎

Démonstration de la Proposition 3. On ne détaille ici que l'obtention du premier point (8), le second se traitant de manière tout à fait analogue. Soient $A, B > 1$, $\delta > 0$ et $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. Soient $3 \leq h \leq X$. Si $h \geq h_2 := X/(\log X)^{1/5}$, le résultat est directement obtenu par l'application du Lemme 8 puisque l'on peut imposer $\delta \gg (\log X)^{-1/99}$. On suppose donc désormais $h \leq h_2$. Pour tout $x \sim X$, avec le Lemme 8 on a

$$\int_{I_{A,B}} \Bigg|\frac{1}{h_2}\sum_{x<n\leq x+h_2} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X}\sum_{n\sim X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}\Bigg| \frac{d\tau}{|\tau|} \ll \frac{\log(AB)}{(\log X)^{4/5}}. \tag{29}$$

On prend $\mathcal{S}$ comme dans la Proposition 7 avec $[P_1, Q_1] \subset [1, h]$. On effectue la manipulation suivante (qui se trouve dans [8]) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\notin\mathcal{S}}} 1 &= 1 - \frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1 + O\Big(\frac{1}{h}\Big)\\ &= \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1 + \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1 + O\Big(\frac{1}{h}\Big).\end{aligned}$$

Cela permet d'écrire, uniformément pour $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\Bigg|\frac{1}{h}\sum_{x<n\leq x+h} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{x<n\leq x+h_2} e^{i\vartheta\omega(n)}\Bigg|\\ &\leq \Bigg|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)}\Bigg| + \frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\notin\mathcal{S}}} 1 + \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1\\ &\leq \Bigg|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)}\Bigg| + \Bigg|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leq x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} 1\Bigg|\\ &\quad + \frac{2}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leq x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1 + O\Big(\frac{1}{h}\Big).\end{aligned}$$

D'après le Lemme 9, il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x<n\leq x+h_2 \\ n\notin\mathcal{S}}} 1 \ll \sum_{j=1}^{J} \frac{\log P_j}{\log Q_j} + \exp\bigl(-c'\sqrt{\log X}\bigr) \ll \frac{\log P_1}{\log Q_1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x<n\leq x+h} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{n\sim X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \\ \ll \log(AB)\left(\frac{\log P_1}{\log Q_1} + \frac{1}{(\log X)^{4/5}} \right) + J_1(x) + J_2(x),\end{aligned}$$

où

$$J_1(x) := \int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x<n\leq x+h \\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x<n\leq x+h_2 \\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|},$$

$$J_2(x) := \int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x<n\leq x+h \\ n\in\mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x<n\leq x+h_2 \\ n\in\mathcal{S}}} 1 \right| \frac{d\tau}{|\tau|}.$$

L'intégrale $\frac{1}{X}\int_X^{2X} J_1(x)^2\,dx$ se réécrit

$$\begin{aligned}\int_{I_{A,B}} \int_{I_{A,B}} \frac{1}{|\tau\tau'|X} \int_X^{2X} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x<n\leq x+h \\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x<n\leq x+h_2 \\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \\ \times \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x<n\leq x+h \\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau')\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x<n\leq x+h_2 \\ n\in\mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau')\omega(n)} \right| dx\,d\tau\,d\tau'.\end{aligned}$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis la Proposition 7 à l'intégrale par rapport à x, on obtient

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} J_1(x)^2\,dx \ll (\log(AB))^2 \left(\frac{(\log h)^{1/3}}{P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{(\log X)^{1/50}} \right).$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, on a

$$J_1(x) \leq \delta \log(AB)$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X\left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{\delta^2(\log X)^{1/50}} \right).$$

L'intégrale $J_2(x)$ se traite exactement de la même façon (avec $\vartheta(\tau) = 0$) et on trouve alors

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x<n\le x+h} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{n\sim X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \ll \log(AB)\left(\delta + \frac{\log P_1}{\log Q_1} + \frac{1}{(\log X)^{4/5}}\right)$$

pour tout $x \sim X$ sauf au plus

$$\ll X\left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{\delta^2 (\log X)^{1/50}}\right).$$

On omet le terme $(\log X)^{-4/5}$ puisque l'on peut imposer $\delta \gg (\log X)^{-1/99}$.

Pour conclure, on fait le même choix pour η, P_1 et Q_1 que dans [8, Section 9] :

- $\eta = \frac{1}{150}$,
- $Q_1 = \min\bigl(h, \exp\bigl(\sqrt{\log X}\bigr)\bigr)$,
- $P_1 = \max(h^{\delta/4}, (\log h)^{40/\eta})$ si $h \le \exp\bigl(\sqrt{\log X}\bigr)$, sinon $P_1 = Q_1^{\delta/4}$. ∎

6.2. Application du résultat de Matomäki et Radziwiłł. Il nous reste à montrer la Proposition 7. Comme indiqué précédemment, cette proposition est une application directe de [8, Lemma 14, Proposition 1] dans le cas où $f(n) = e^{i\vartheta\omega(n)}$; cependant, la proposition 1 de [8], telle quelle, ne s'applique qu'aux fonctions multiplicatives $f : \mathbb{N} \to [-1,1]$ réelles. L'unique point de leur preuve ne couvrant pas le cas $f(n) = e^{i\vartheta\omega(n)}$ se trouve à [8, p. 28], c'est l'estimation

$$\max_{(\log X)^{1/15} \le |u| \le 2T^{1+\varepsilon}} |R_{v,H}(1+iu)| \ll (\log X)^{-1/16+o(1)} \frac{\log Q}{\log P}$$

où

$$R_{v,H}(s) := \sum_{\substack{Xe^{-v/H} \le n \le 2Xe^{-v/H} \\ n\in\mathcal{S}}} \frac{f(n)}{n^s} \frac{1}{\#\{p \in [P,Q] : p \mid n\} + 1} \quad (s \in \mathbb{C}). \tag{30}$$

Cette majoration est principalement due au fait qu'une fonction réelle n'est pas « p^{it}-simulatrice » [8, Lemma 2]. Ce type de résultat est dû à des travaux initiés par Halász dans les années 1970, puis amplifiés notamment par Granville et Soundararajan. Les fonctions qui nous intéressent ne sont pas « p^{it}-simulatrices » non plus puisqu'elles sont constantes sur les nombres premiers. Cela nous permet d'adapter la preuve assez simplement. Pour la suite, on se donne l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$ défini précédemment et on pose $P := \exp((\log X)^{1-1/48})$, $Q := \exp(\log X/\log_2 X)$ et $H := (\log X)^{1/48}$.

Proposition 10. *Soit $0 < \varepsilon < 1$. On suppose $\mathcal{S}$, P, Q et H définis comme ci-dessus. Uniformément pour $3 \le T \le X$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $v \in$*

$[\lfloor H\log P\rfloor, H\log Q]$, lorsque $f(n)=e^{i\vartheta\omega(n)}$ on a

$$\max_{(\log X)^{1/15}\leq |u|\leq 2T^{1+\varepsilon}} |R_{v,H}(1+iu)| \ll (\log X)^{-1/16+o(1)}\frac{\log Q}{\log P},$$

où $R_{v,H}$ est défini par (30)*, lorsque X tend vers l'infini.*

La preuve suit le même schéma que dans [8, Lemma 3]. Bien que cela ne nous soit pas utile, on note qu'une meilleure majoration est possible en étudiant spécifiquement le cas $f(n)=e^{i\vartheta\omega(n)}$ par des calculs explicites. Lorsque f et g sont deux fonctions multiplicatives de module inférieur à 1 et $x\geq 1$, on note

$$\mathbb{D}(f,g,x)^2 = \sum_{p\leq x}\frac{1-\Re\mathfrak{e}\big(f(p)\overline{g(p)}\big)}{p}.$$

C'est au sens de cette « distance » que l'on montre que nos fonctions ne ressemblent pas à $n\mapsto n^{it}$. En effet, on a le lemme suivant.

Lemme 11. *Soient f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité, et*

$$F(s)=\sum_{n\sim x}\frac{f(n)}{n^s}\qquad (x\geq 1,\ s\in\mathbb{C}).$$

Uniformément pour $T_0\geq 1$, $t\in\mathbb{R}$ et $x\geq 1$, on a

$$|F(1+it)| \ll (1+m)e^{-m}+1/T_0$$

où

$$m=m(x,T_0) := \min_{|t_0|\leq T_0}\mathbb{D}(f,n^{it+it_0},x)^2.$$

Démonstration. Ceci se déduit directement de [12, corollaire III.4.12] par sommation d'Abel. ∎

Le lemme suivant permet de contourner la condition non multiplicative $n\in\mathcal{S}$; on rappelle que l'ensemble $\mathcal{S}=\mathcal{S}_X$ a été défini au début de la section 6.1.

Lemme 12. *Pour $\mathcal{J}\subset\{1,\ldots,J\}$, on définit la fonction totalement multiplicative $g_{\mathcal{J}}$ par*

$$g_{\mathcal{J}}(p)=\begin{cases}1 & \textit{si } p\notin\bigcup_{j\in\mathcal{J}}[P_j,Q_j],\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Alors pour toute suite $(a_n)_{n\sim X}$, on a

$$\sum_{\substack{n\sim X\\ n\in\mathcal{S}}} a_n = \sum_{n\sim X} a_n\prod_{j=1}^{J}(1-g_{\{j\}}(n)) = \sum_{\mathcal{J}\subset\{1,\ldots,J\}}(-1)^{\#\mathcal{J}}\sum_{n\sim X}a_n g_{\mathcal{J}}(n).$$

Avec ce lemme, on peut se passer de la condition $n\in\mathcal{S}$ au prix d'un facteur multiplicatif $2^J=(\log X)^{o(1)}$.

LEMME 13. *Soient $A \geq 1$ et $0 < \varepsilon < 1/4$ fixés. Soit $X \geq 20$. On suppose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$, P et Q définis comme précédemment. Alors uniformément pour $\mathcal{J} \subset \{1, \ldots, J\}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $1 \leq \alpha \leq X^A$ et $x \in [X^{1/4}, X]$, on a*

$$\mathbb{D}(h_{\mathcal{J},\vartheta}, n^{i\alpha}, x)^2 \geq \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{48} - \varepsilon\right) \log_2 x + O(1),$$

où $h_{\mathcal{J},\vartheta}(n) = g_{\mathcal{J}}(n) e^{i\vartheta\omega(n)}$ lorsque n n'a aucun facteur premier dans l'intervalle $[P, Q]$ et $h_{\mathcal{J},\vartheta}(n) = 0$ sinon, avec les fonctions $g_{\mathcal{J}}$ définies au Lemme 12.

Démonstration. Puisque $Q_J \leq \exp\big(\sqrt{\log X}\big)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(h_{\mathcal{J},\vartheta}, n^{i\alpha}, x)^2 &= \sum_{p \leq x} \frac{1 - \mathfrak{Re}(h_{\mathcal{J},\vartheta}(p) p^{-i\alpha})}{p} \\
&\geq \sum_{\exp((\log x)^{2/3+\varepsilon}) < p \leq \exp((\log x)^{1-1/48})} \frac{1 - \mathfrak{Re}(e^{i\vartheta} p^{-i\alpha})}{p} \\
&\geq \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{48} - \varepsilon\right) \log_2 x + O(1) \\
&\quad + O\Bigg(\sum_{\exp((\log x)^{2/3+\varepsilon}) < p \leq \exp((\log x)^{1-1/48})} \frac{\mathfrak{Re}(e^{i\vartheta} p^{-i\alpha})}{p}\Bigg).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathfrak{Re}(e^{i\vartheta} p^{-i\alpha}) = (\cos\vartheta)\mathfrak{Re}(p^{-i\alpha}) - (\sin\vartheta)\mathfrak{Im}(p^{-i\alpha})$. De plus, la région sans zéro de Korobov–Vinogradov pour la fonction zêta nous fournit (voir par exemple [2, (20)])

$$\Bigg| \sum_{\exp((\log X)^{2/3+\varepsilon}) < p \leq \exp((\log X)^{1-1/48})} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} \Bigg| \ll 1.$$

On a bien le résultat attendu. ∎

Démonstration de la Proposition 10. Grâce aux trois lemmes précédents, il suffit de reprendre la preuve de [8, Lemma 3], *mutatis mutandis.* ∎

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour les nombreuses discussions que nous avons eues, et ses suggestions fort utiles. Je remercie par ailleurs Maksym Radziwiłł pour ses remarques pertinentes.

Références

[1] G. J. Babu, *Distribution of the values of ω in short intervals*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 40 (1982), 135–137.

[2] M. Balazard et G. Tenenbaum, *Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler*, Compos. Math. 110 (1998), 239–250.

[3] H. Delange, *Sur des formules dues à Atle Selberg*, Bull. Sci. Math. 83 (1959), 101–111.

[4] P. Erdős and M. Kac, *On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 25 (1939), 206–207.
[5] C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law*, Acta Math. 77 (1945), 1–125.
[6] J. Friedlander and H. Iwaniec, *Opera de cribro*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 57, Amer. Math. Soc., 2010.
[7] É. Goudout, *Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles*, Proc. London Math. Soc. 115 (2017), 599–637.
[8] K. Matomäki and M. Radziwiłł, *Multiplicative functions in short intervals*, Ann. of Math. 183 (2016), 1015–1056.
[9] K. Matomäki, M. Radziwiłł and T. Tao, *An averaged form of Chowla's conjecture*, Algebra Number Theory 9 (2015), 2167–2196.
[10] V. A. Plaksin, *A statistical property of the sieve of Eratosthenes*, Theory Probab. Appl. 36 (1991), 608–614.
[11] A. Rényi and P. Turán, *On a theorem of Erdős–Kac*, Acta Arith. 4 (1958), 71–84.
[12] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4ième éd., Belin, 2015.
[13] J. Teräväinen, *Almost primes in almost all short intervals*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 161 (2016), 247–281.

Élie Goudout
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05, France
et
Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG
Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité
75013 Paris, France
E-mail: eliegoudout@hotmail.com