1M025 **partiel - mars 2018**

Documents et calculatrices interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Exercice I. On fixe deux réels $\omega_0 > 0$ et $\gamma \geq 0$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre :

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que la fonction à valeurs complexes $\phi_\nu(t) = e^{\nu t}$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $P(\nu) = 0$ où $P(X) = X^2 + 2\gamma X + \omega_0^2$ est le polynôme caractéristique.

   En effet, $\phi''(t) + 2\gamma\phi'(t) + \omega_0^2\phi(t) = P(\nu)e^{\nu t}$.

2. À quelle condition sur les coefficients ω_0 et γ les racines du polynôme ci-dessus sont réelles? complexes conjuguées?

   Elles sont réelles si le discriminant de P, $4(\gamma^2 - \omega_0^2)$ est non-négatif, *i.e.* $\gamma - \omega_0 \geq 0$. Sont complexes conjuguées si $\gamma - \omega_0 < 0$.

   Soit ω et F_0 des réels fixés. On considère dans la suite l'équation non-homogène

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = F_0 \cos(\omega t) \tag{F}$$

3. Écrire toutes les solutions réelles de l'équation homogène associée comme combinaisons linéaires de deux solutions réelles.

   Du cours : $c\cos\omega_0 t + d\sin\omega_0 t$, avec c et d réels.

4. Si $\omega \neq \omega_0$, montrer qu'il existe une unique solution particulière de l'équation (F) de la forme $\varphi_\omega = A\cos(\omega t)$ où A est une constante à préciser.

   On substitue φ_ω dans F : $-A\omega^2\cos\omega t + \omega_0^2\cos\omega t = F_0\cos\omega t$. On en déduit que $A = \frac{-F_0}{\omega^2-\omega_0^2}$.

5. Déterminer, dans le cas $\omega \neq \omega_0$, l'unique solution $\varphi_\omega(t)$ de (F) avec condition initiale $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

   On calcule $0 = \varphi_\omega(0) = c + \frac{-F_0}{\omega^2-\omega_0^2}$ et $0 = \varphi'_\omega(0) = \omega_0 d$. D'où $d = 0$ et $c = \frac{F_0}{\omega^2-\omega_0^2}$. La solution est $\varphi_\omega(t) = \frac{F_0}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{-F_0}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\omega t$.

6. Le cas de résonance : si $\omega = \omega_0$, montrer qu'il existe une unique solution particulière de l'équation (F) de la forme $\varphi_{\omega_0}(t) = Bt\sin(\omega_0 t)$ où B est une constante à préciser.

   On substitue $\varphi_{\omega_0}(t)$ dans F : $2B\omega_0\cos(\omega_0 t) - Bt\omega_0^2\sin(\omega_0 t) + Bt\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = F_0\cos\omega_0 t$. On en déduit que $B = \frac{F_0}{2\omega_0}$.

7. Déterminer, dans le cas $\omega = \omega_0$, l'unique solution $\varphi_{\omega_0}(t)$ de (F) avec condition initiale $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

   On calcule $0 = \varphi_{\omega_0}(0) = c$ et $0 = \varphi'_{\omega_0}(0) = \omega_0 d$. D'où $c = 0$, $d = 0$ et la solution est $\varphi_{\omega_0}(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$.

   L'objectif de cet exercice est de montrer que, malgré le comportement très différent de solutions résonantes, si on fixe les conditions initiales les solutions non-résonantes convergent vers la solution résonante quand ω tend vers ω_0.

8. Montrer que, pour chaque t fixé, $\lim_{\omega\to\omega_0} \varphi_\omega(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$ et conclure.

   On observe que $\lim_{\omega\to\omega_0} \varphi_\omega(t) = \lim_{\omega\to\omega_0} \frac{F_0 t}{\omega+\omega_0} \frac{\cos\omega_0 t - \cos\omega t}{\omega t - \omega_0 t} = \frac{-F_0 t}{2\omega_0} \frac{d\cos}{dx}(\omega_0 t) = \frac{F_0 t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \varphi_{\omega_0}(t)$. Les solutions non résonantes convergent à temps fixé vers la solution résonante quand ω tend vers ω_0.

9. Transformer l'équation (F) en un système d'équations du premier ordre $z' = f(t, z)$ où $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ et écrire la condition initiale.

   On définit le champ sur $\mathbf{R}^2$ qui dépend du temps $(y, -\omega_0^2 x + F_0 \cos\omega t)$. L'équation devient
   $$x'(t) = y$$
   $$y'(t) = -\omega_0^2 x + F_0 \cos\omega t.$$

10. Dessiner ce champ de vecteurs au temps $t = \pi/2\omega$.

    Le champ de directions et une solution sont dessinés dans la Figure 1.

Exercice II. Dans cet exercice on "perturbe" une équation facile à résoudre.

On considère l'équation
$$x'(t) = x(t)^2 - 1.$$

1. Quelles sont les solutions constantes?

   $x(t) = 1$ et $x(t) = -1$.

2. Décrire toutes les solutions non-constantes.

   On écrit
   $$\frac{dx}{x^2-1} = (\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1})dx = dt$$
   et on intègre :
   $$\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = t + Const.$$

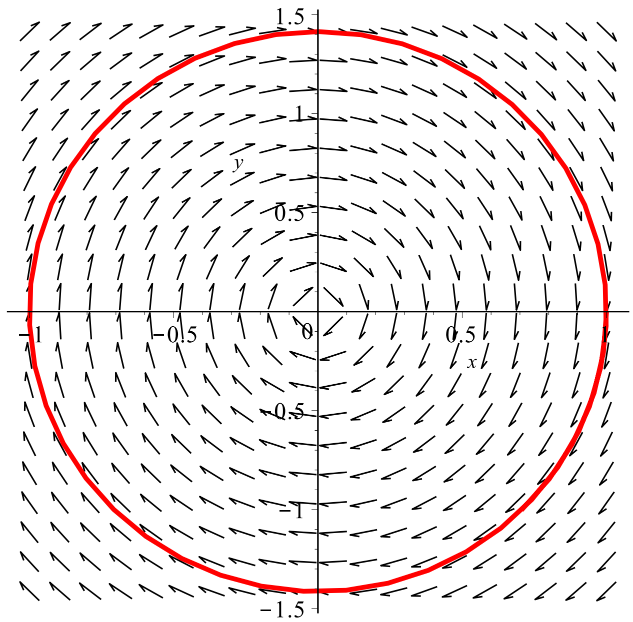

Figure 1: Le champ de vecteurs au temps $t = \pi/2\omega$ et $\omega_0^2 = 2$.

On obtient
$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = t + Const.$$
et finalement $x(t) = \frac{1+Ke^{2t}}{1-Ke^{2t}}$ avec K une constante différente de zero.

3. Tracer dans un plan (t, x) le champ de directions de l'équation.

4. Quelles sont les solutions avec condition initiales $x(0) = -2$, $x(0) = 0$? Pour chacune des solutions expliciter son intervalle maximal de définition. Tracer dans le plan ces solutions.

   Voici les solutions dans le plan avec le champ de directions :

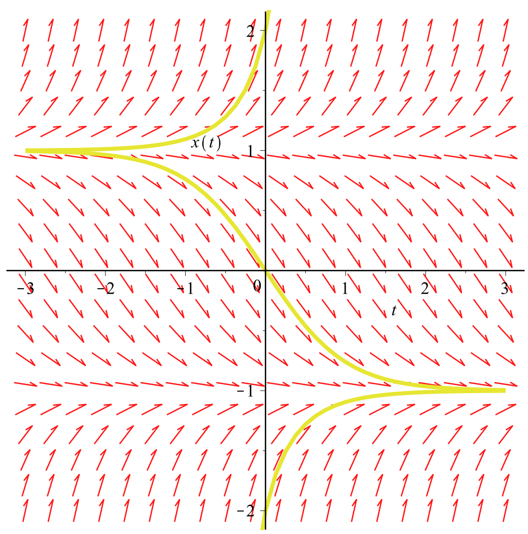

Figure 2: L'équation $x'(t) = x(t)^2 - 1$.

On considère maintenant une "perturbation" de l'équation précèdente :

$$x'(t) = x(t)^2 - 1 + e^{-t^2} = f(t, x(t)).$$

Dans la Figure 3 vous trouverez le champs de directions de cette équation ainsi que quelques solutions (avec conditions initiales $x(0) = 0, x(0) = -2$ et $x(0) = 2$).

D'autres solutions sont montrés dans la Figure 4

5. Montrer que la fonction $\beta(t) = -1 - e^{-t^2}$ est une barrière supérieure forte pour $t > 2$.

   On calcule $\beta'(t) = 2te^{-t^2}$ d'une part et, d'autre part, $f(t, \beta(t)) = (-1 - e^{-t^2})^2 - 1 + e^{-t^2} = 2e^{-t^2} + e^{-2t^2} + e^{-t^2} < 4e^{-t^2} < \beta'(t)$ car $e^{-2t^2} < e^{-t^2}$ pour tout t et $4 < 2t$ pour $t > 2$. On obtient une barrière forte pour $t > 2$.

6. En déduire qu'une solution avec condition initiale $x(t_0) = x_0 < -1 - e^{-t_0^2}$ avec $t_0 > 2$ est strictement croissante et définie sur $[t_0, +\infty[$.

   Par le théorème de la barrière forte la solution $x(t)$ reste en dessous de $\beta(t)$. On a alors $x(t) < -1 - e^{-t^2}$ et $x'(t) = f(t, x(t)) = x(t)^2 - 1 + e^{-t^2} > (-1 - e^{-t^2})^2 - 1 + e^{-t^2}$ (car $(x(t))^2 > (-1 - e^{-t^2})^2$). Maintenant, on observe que $(-1 - e^{-t^2})^2 - 1 + e^{-t^2} = 2e^{-t^2} + e^{-2t^2} + e^{-t^2} > 0$. Donc la dérivée $x'(t)$ est strictement positive.

7. Montrer que la fonction $\alpha(t) = -1$ est une barrière inférieure forte pour tout $t \in \mathbf{R}$.

   En effet $\alpha'(t) = 0$ et $f(t, \alpha(t)) = e^{-t^2} > 0$.

8. En déduire qu'il existe une unique solution de l'équation comprise entre $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

   Par le théorème de l'anti-entonnoir il exite une solution. On ne peut pas dire quelle est unique. Même si l'entonnoir est resserré, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x < 0$ pour des points dans l'anti-entonnoir. L'énnoncé est incorrect concernant l'unicité.

9. Existe-t-il une solution qui croise la barrière $\alpha(t)$ du bas vers le haut?

   Oui, il suffit d'observer que $f(0, -1) = 1$ et il existe une solution avec condition initiale $x(0) = -1$ qui aura donc dérivée 1. Elle croise $\alpha(t)$ en $t = 0$.

10. Existe-t-il une solution qui croise la droite $x(t) = 1$ du bas vers le haut?

    Oui. De manière analogue à la question précendente, il suffit de considérer la solution avec condition initiale $x(0) = 1$.

11. Existe-t-il une solution qui traverse la bande $\mathbf{R} \times [-1, 1]$?

    Non, la droite $x(t) = 0$ est une barrière supérieure définie sur $\mathbf{R}$ et forte sur $\mathbf{R}^*$.

12. Montrer que $\gamma(t) = 1 - e^{-t^2}$ est une barrière supérieure sur un intervalle à déterminer et en déduire l'existence d'une solution définie sur $\mathbf{R}$ qui est asymptotique à la droite $x(t) = 1$ en $\pm\infty$.

    Observer d'abord que $x(t) = 1$ est une barrière inférieure forte. Quant à $\gamma(t)$: $f(t, \gamma(t)) = (1 - e^{-t^2})^2 - 1 + e^{-t^2} = -e^{-t^2} + e^{-2t^2}$. Ceci est $< 2te^{-t^2} = \gamma'(t)$ sur l'intervalle $]0, \infty[$. Donc $\gamma(t)$ est barrière supérieure forte dans cet intervalle. Par le théorème de l'anti-entonnoir on en déduit l'existence d'une solution asymptote à la droite $x(t) = 1$. Cette fois la solution dans l'anti-entonnoir (clairement resseré) est unique car $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x > 0$. Mais cette solution reste bornée sur $\mathbf{R}$ et pour le temps négatif elle approche aussi la même droite. En effet, d'une part, $x(t) = 1$ est une barrière infèrieure et donc la solution ne peut pas la croiser en temps négatif. D'autre part, la solution reste au dessus de la solution passant par $x(0) = 0$ qui est déssinée et qui est clairement asymptote à la droite $x = 1$ quand t tend vers $-\infty$.

    On pourra aussi remarquer que l'équation est invariante par $(t, x) \to (-t, -x)$ (on échange le sens du temps et le signe de x en même temps). On obtiendra aussi l'existence d'une solution asymptotique à $x(t) = -1$ en $t = \pm\infty$.

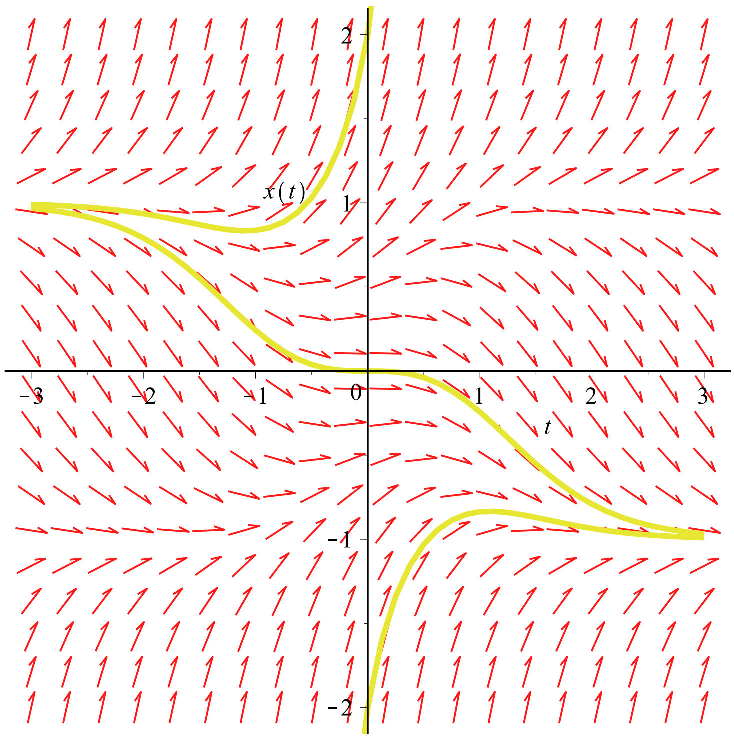

Figure 3: Le champ de direction de l'équation $x'(t) = x(t)^2 - 1 + e^{-t^2}$ avec quelques solutions.

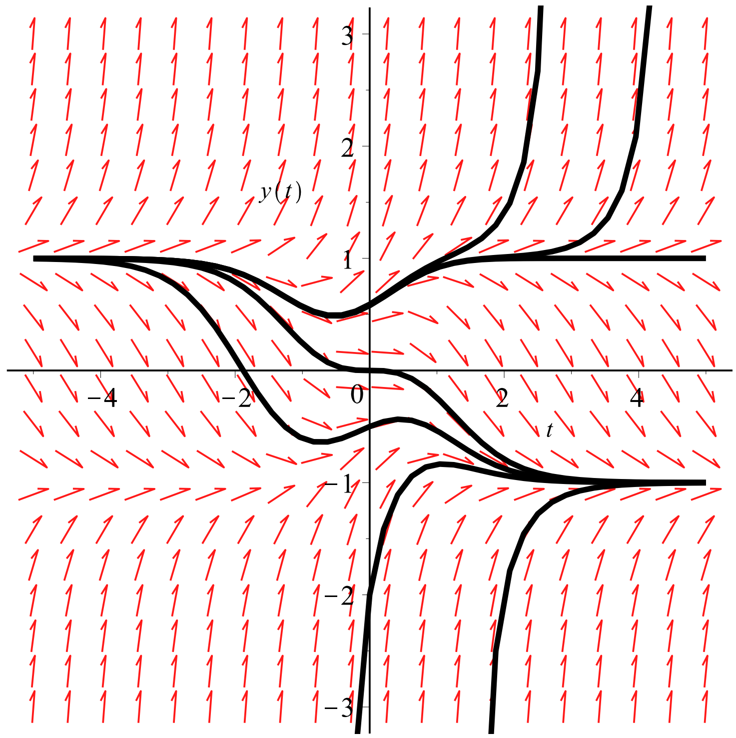

Figure 4: Autres solutions.