Cours 10

1.2 Solution maximale et durée de vie

$$x'(t) = F(t, x(t)) \qquad F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Théorème hyp : F l. l. par rapport à la 2ème variable $\quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$\forall (t_0, x_0) \in U$ il existe une unique solution maximale $u :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^n$

satisfaisant $u(t_0) = x_0$. Toute autre solution du problème de Cauchy est une restriction de u à un intervalle $I \subset]t_-, t_+[$.

<u>preuve</u> : On définit $]t_-, t_+[$ comme l'union de tous les intervalles contenant t_0 sur lesquels il existe une solution du problème de Cauchy. Par la proposition précédente

$u : \bigcup I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution.

$]t_-, t_+[= \bigcup I$ est l'intervalle maximal.

1.2.2 Durée de vie

Exemple : $x'(t) = x^2(t)$

$$F(t, x) = x^2 \qquad F : \underset{\overset{\shortparallel}{U}}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

F loc. Lipschitz

- $x(t) = 0 \quad \forall t$ est solution
- $\displaystyle\int^x \frac{ds}{s^2} = \int^t dt \qquad (x(t_0) = x_0)$

$$-\frac{1}{s}\Big|_{x_0}^{x} = t - t_0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t - t_0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{x_0}{(t_0 - t)x_0 + 1}}$$

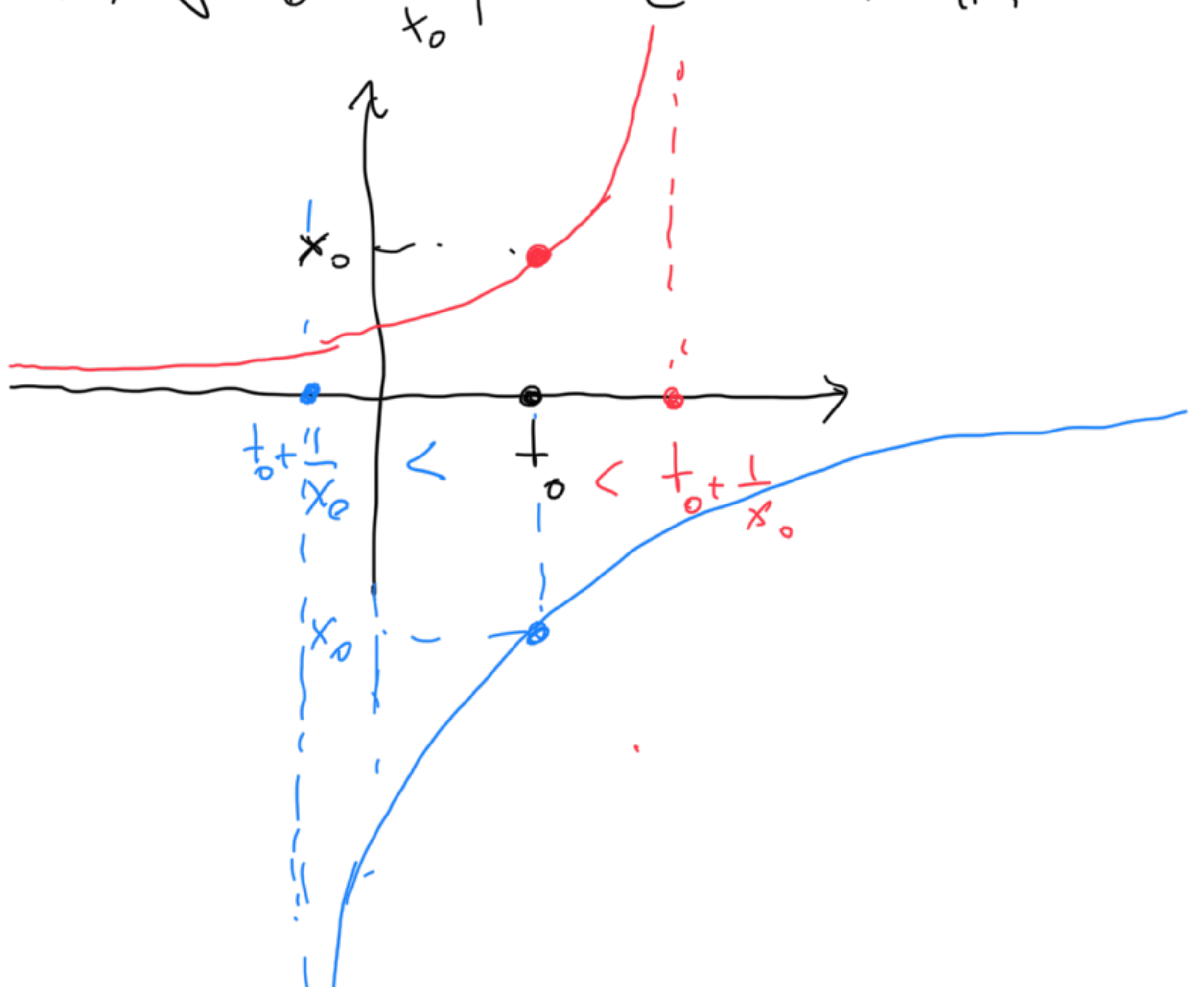
solutions maximales :

- $x_0 > 0$ $(t_0 - t)x_0 + 1 \neq 0$ pour t grand négatif

solution: $u :]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[\to \mathbb{R}$

- $x_0 < 0$ $(t_0 - t)x_0 - 1 \neq 0$ dans l'intervalle $]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[$

$u :]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[\to \mathbb{R}$



$t_- = t_0 + \frac{1}{x_0}$ $\qquad t_+ = +\infty$

$t_- = -\infty$ $\qquad t_+ = \underbrace{t_0 + \frac{1}{x_0}}$

Proposition (sortie de compacts).

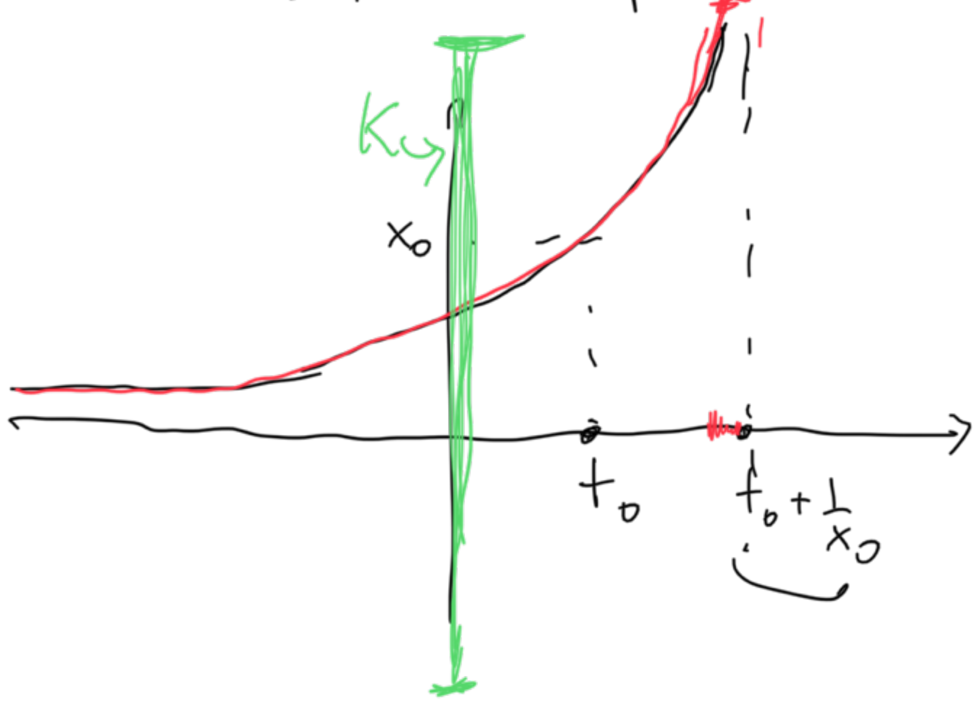
$$x'(t) = F(t, x(t)) \qquad F : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$U = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{J}} \times \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}}$$

Soit $u :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale.

Si $t_+ < \sup J$ alors u sort définitivement de tout compact de Ω quand $t \longrightarrow t_+$.

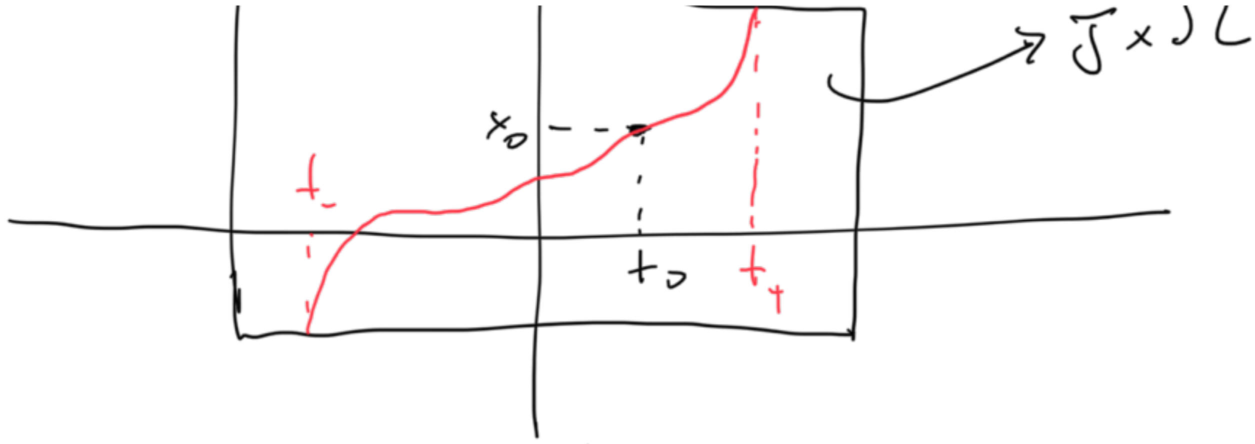
(i.e. $\forall K \subset \Omega$ $\exists t_K$ t.q. $u(t) \notin K$ pour $t > t_K$)



$J = \mathbb{R}$

$t_+ = t_0 + \frac{1}{X} < \infty$

(si la solution n'est pas définie sur J elle "explose")



<u>preuve</u> : Par absurde.

Supposons qu'il existe $t_n \in]t_-, t_+[$

t.q. $t_n \to t_+$ et $v(t_n) \in K$.

On obtient une sous-suite convergente

$$v(t_{n_k}) \longrightarrow x_+ \in K \subset \Omega$$

Le problème de Cauchy

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

$$x(t_+) = x_+$$

admet une solution dans un voisinage de t_+

$]t_+ - \delta, t_+ + \delta[$

Il existe un voisinage V de (t_+, x_+) t.q.

le problème de Cauchy $x(t) = x$ $(t, x) \in V$

admet une solution sur $]t - \delta, t + \delta[$

le même δ.

On choisit $(t_n, v(t_n)) \in V$ t.q.

$$t_n + \delta > t_+$$

$\Rightarrow$ la solution du problème de Cauchy

$$v :]t_n - \delta, t_n + \delta[\longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_n) = u(t_n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ solution sur $]t_-, t_n + \delta[$
recollement de u et v

contradiction

solution maximal au delà de t_+

$\blacksquare$

> **Corollaire :** Si l'image d'une solution maximale $u :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ est contenue dans un compact $\forall t \in [t_0, t_+[$,
> alors $t_+ = \sup J$
>
> $\left(F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad U = J \times \Omega \right)$

<u>Example</u> : $x' = \frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} \qquad t > 0$

$$U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$$

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(t, x) = \frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t}$$

$u(t) = \sin \frac{1}{t}$ est une solution $\forall t > 0$

$u :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

solution maximale,

mais $\lim\limits_{t\to 0} \sin\frac{1}{t}$ n'existe pas

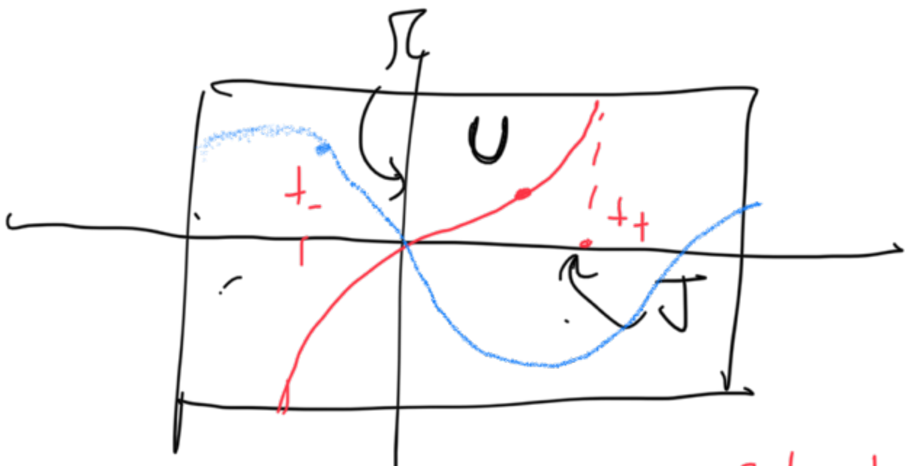
Remarque: Si $\|F\| \leq M$ et t_+ est fini alors la limite $\lim\limits_{t\to t_+} u(t)$ existe:

$$\|u(t) - u(s)\| = \left\| \int_s^t F(\xi, u(\xi))\, d\xi \right\|$$

$$\leq \left| \int_s^t \|F(\xi, u(\xi))\|\, d\xi \right|$$

$$\leq M\, |t-s|$$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to t_+} u(t)$ converge



$U = J \times \Omega$

$u :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^d$

solution maximale

$v : J \longrightarrow \mathbb{R}$

solution globale

Définition : Soit $F : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On dit qu'une solution maximale est une solution globale si $I = J$ (où I est l'intervalle maximale $v : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$).

Théorème : Soit $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses du T.C.-L. t.q.

$\forall \underbrace{I}_{\text{compact}} \subset J$ il existe $C_1, C_2 > 0$

t.q. $\|F(t,x)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|$

$\forall t \in I, x \in \mathbb{R}^n$

Alors toute solution maximale est globale.

Exemple : $x'(t) = \underline{A(t)}\, x(t) + b(t)$

$J \subset \mathbb{R}$ ouvert

$A : J \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue

$b : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue

(équation linéaire)

solutions maximales sont globales

$$F(t,x) = A(t)\,x + b(t)$$

montrer que : $\|F(t,x)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|$

on conclut par le théorème.

On utilisera, pour la démonstration du théorème le :

lemme (Gronwall) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue positive et $t_0 \in I$.

Si $\boxed{\varphi(t) \leq c_0 + c\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds}$ $\forall t \in I,\ t \geq t_0$

Alors $\boxed{\varphi(t) \leq c_0 e^{c(t-t_0)}}$ $\forall t \in I,\ t \geq t_0$

preuve : On définit

$$v(t) = c_0 + c\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds$$

est de classe C^1

$$v'(t) = c\,\varphi(t) \leq c_0 + c\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds = v(t)$$

$\forall t \geq t_0,\ t \in I$

On calcule

$$\frac{d}{dt}\left(v(t)\,e^{-c(t-t_0)}\right) = v'(t)\,e^{-c(t-t_0)} - c\,v(t)\,e^{-c(t-t_0)}$$

$= (v'(t) - c\,v(t))\,e$

≤ 0

$\Rightarrow \quad v(t)\,e^{-c(t-t_0)}$ est décroissante

t.q. en t_0 vaut $v(t_0) = c_0$

$c_0 + c\int_{t_0}^{t_0} \varphi(s)\,ds$

$\Rightarrow \quad v(t)\,e^{-c(t-t_0)} \leq c_0$

$\varphi(t) \leq v(t) \leq c_0\, e^{c(t-t_0)}$.

$\Rightarrow \quad \varphi(t) \leq c_0\, e^{c(t-t_0)}$

$\blacksquare$

preuve du théorème : on veut montrer que la solution est globale.

Supposons que $v :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ est solution maximale et $t_+ < \sup J$.

Par le théorème de sortie de compacts on a $\lim_{t \to t_+} \|v(t)\| = +\infty$

Mais $[t_0, t_+] \subset J$ est compact

$\Rightarrow \quad \|F(t,x)\| \leq C_1 + C_2\|x\|$

$\forall t \in [t_0, t_+]$

$x \in \mathbb{R}^n$.

Alors $\forall t \in [t_0, t_+]$

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t, u(s))\,ds\|$$

$$\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(t, u(s))\|}\,ds$$

$$\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \underbrace{(c_1 + c_2 \|u(s)\|)}\,ds.$$

$$\leq \|u(t_0)\| + \underline{c_1 (t - t_0)} + c_2 \int_{t_0}^{t} \|u(s)\|\,ds$$

$t = t_+$

$$\Psi(t) = \|u(t)\|$$

$$\Psi(t) \leq \underbrace{\|u(t_0)\| + c_1 (t_+ - t_0)}_{c_0} + \underbrace{c_2}_{c} \int_{t_0}^{t} \Psi(s)\,ds.$$

Lemme de Gronwall :

$$\Psi(t) = \|u(t)\| \leq c_0 e^{c_2 (t - t_0)}$$

$\Rightarrow$ $\|u(t)\|$ est borné !

contradiction
avec la sortie
de compacts.

$\blacksquare$

Remarque : La condition $\|f(t,x)\| \leq c_1 + c_2 \|x\|$
est dite condition de sous-linéarité.

Exemple : solutions globales :

Exemple : solution globale.

On considère $y'' = g(y(t))$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1

système du premier ordre

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = g(x_1(t)) \end{array} \right.$$

On définit l'énergie potentielle et l'énergie totale

$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad U(s) = -\int_0^s g(\tau)\, d\tau$

$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + U(x_1)$

proposition : Si $(u_1(t), u_2(t))$ est solution de l'équation $(*)$ alors $E(u_1(t), u_2(t))$ est constante sur l'intervalle de définition.

preuve : $\frac{d}{dt} E(u_1(t), u_2(t)) = \frac{2 u_2(t)\, u_2'(t)}{2} - g(u_1(t))\, u_1'(t)$

$= u_2(t) u_2'(t) - u_2'(t) u_2(t)$

$= 0$

Proposition : Si $U(s) = -\int_0^s g(\tau)\, d\tau \geq c_0$ $\forall s \in \mathbb{R}$ alors toute solution maximale est globale.

preuve : Soit $(v_1(t), v_2(t))$ solution maximale définie sur $]t_-, t_+[$

Soit $c = E(v_1(t), v_2(t)) = \frac{v_2^2(t)}{2} + U(v_1(t))$
↳ constante

$$\geq \frac{v_2^2(t)}{2} + c_0$$

$$\Rightarrow |v_2(t)| \leq \sqrt{2(c-c_0)} \quad \forall t \in]t_-, t_+[$$

Aussi $|v_1(t)| = |v_1(0) + \int_0^t v_1'(s)\,ds|$

$$= |v_1(0) + \int_0^t v_2(s)\,ds|$$

$$\leq |v_1(0)| + \left|\int_0^t |v_2(s)|\,ds\right|$$

$$\leq |v_1(0)| + |t|\sqrt{2(c-c_0)}$$

$\Rightarrow$ v_1 et v_2 sont bornées sur des intervalles bornés (i.e. $|t| \leq R$)

$\Rightarrow$ $t_+ = +\infty$, $t_- = -\infty$
par le corollaire. ∎

Exemple : solution qui n'est pas globale
(si le potentiel n'est pas minoré)

$g(s) = 2s^3$

$$U(s) = -\int_0^s 2\xi^3 d\xi = -\frac{2}{4}\xi^4\Big|_0^s = -\frac{1}{2}s^4$$

n'est pas borné.

$\frac{x_1'^2}{2} + U(x_1) =$ constant   cond. initiale $x_1(0) = 1$

$$\frac{x_1'^2}{2} - \frac{x_1^4}{2} = 0 \Rightarrow x_1'^2 = x_1^4 \Rightarrow x_1' = x_1^2$$

$$\int_1^u \frac{dx_1}{x_1^2} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{x_1}\Big|_1^u = t$$

$$-\frac{1}{u(t)} + 1 = t$$

$$u(t) = \frac{1}{1-t}$$

$t_- = -\infty$, $t_+ = 1$ ($u(t)$ explose en $t \to 1$)

solution maximale n'est pas globale.

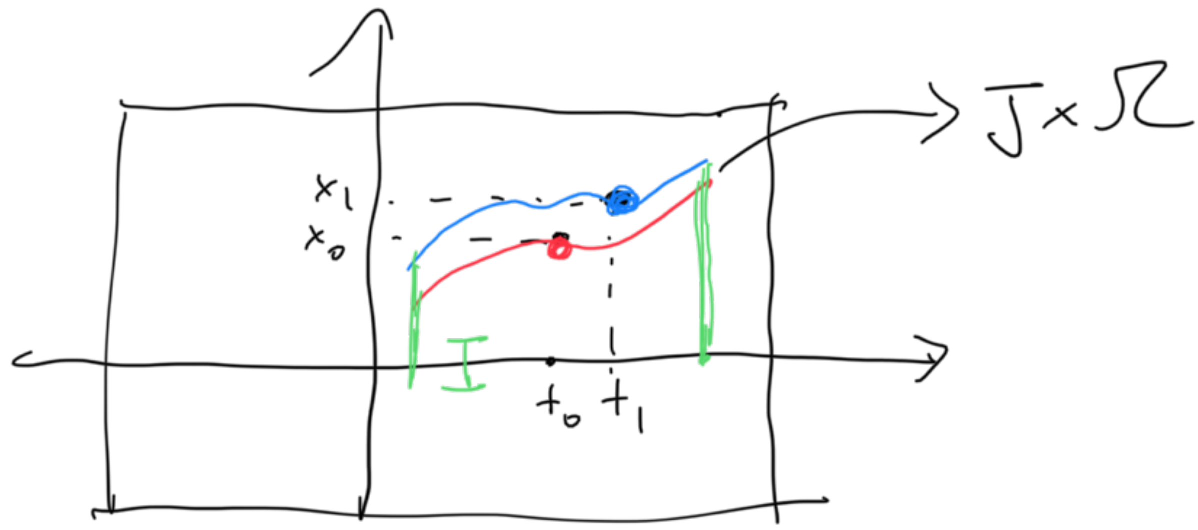
1.3 Continuité par rapport aux données initiales.

$x'(t) = F(t,x)$ $F : J \times \Omega \to \mathbb{R}^4$ continue

$x(t_0) = x_0$ $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ loc. Lipschitz 2ème variable

$x(t_1) = x_1$

On suppose (t_0, x_0) et (t_1, x_1) dans un voisinage $V \subset J \times \Omega$ t.q. les solutions des problèmes de Cauchy v_1 et v_2 sont définies sur le même intervalle.



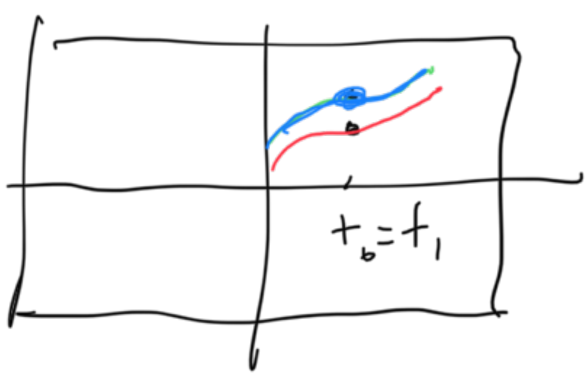
$I \subset J$ $\qquad v_1 : I \to \Omega$
$\qquad\qquad v_2 : I \to \Omega$

Théorème : Il existe des constantes $L, M > 0$ t.q. $\forall t \in I$

$$\| v_1(t) - v_2(t) \| \leq \left(\|x_1 - x_0\| + M \|t_1 - t_0\| \right) e^{L|t-t_0|}$$

En particulier si $t_1 = t_0$

$$\boxed{\| v_1(t) - v_2(t) \| \leq \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_0|}}$$



preuve : stratégie : lemme de Gronwall.

$$u_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u_0(s))\,ds$$

$$u_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} F(s, u_1(s))\,ds$$

$$\boxed{\|u_1(t) - u_0(t)\|} \leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, u_0(s))\,ds - \int_{t_1}^{t} F(s, u_1(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^{t_0} F(s, u_1(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} F(s, u_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} F(s, u_0(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^{t_0} F(s, u_1(s))\,ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} (F(s, u_1(s)) - F(s, u_0(s)))\,ds \right\|$$

$$\leq \|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0| + \left| \int_{t_0}^{t} \| F(s, u_1(s)) - F(s, u_0(s)) \|\,ds \right|$$

$\|F\| \leq M$ sur un compact

localement Lipschitz

$$\boxed{\leq \underbrace{\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|}_{c_0} + \underbrace{L}_{c} \left| \int_{t_0}^{t} \| u_1(s) - u_0(s) \|\,ds \right|}$$

$$\Psi(t) = \| u_1(t) - u_0(t) \|$$

lemme de Gronwall

$$\Longrightarrow \| u_1(t) - u_0(t) \| \leq \left(\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0| \right) \times e^{L|t - t_0|}$$

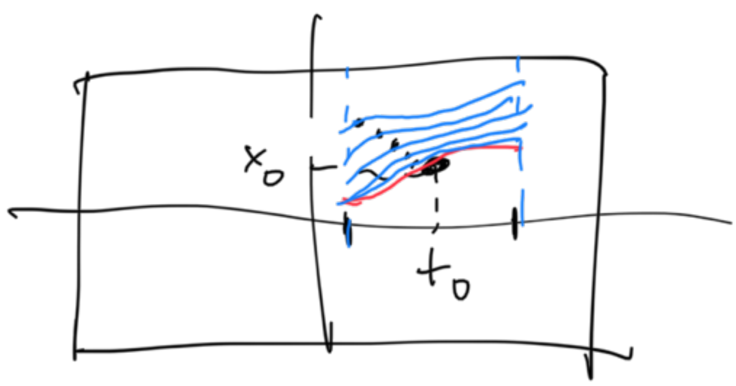
Remarque : M et L sont determiner sur un compact K par $\sup_K \|F\|$ et la constante de Lipschitz sur le compact.

Corollaire : Soit $(t_n, x_n) \in J \times \Omega$ une suite t.q. $(t_n, x_n) \longrightarrow (t_0, x_0)$. Soit v_0 et v_n les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_n) = x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

définis sur l'intervalle I.

Alors $\lim_{n \to \infty} \| v_n - v_0 \|_\infty = 0$



preuve : immediate par le théorème précédent.

Proposition : Soient $F, g : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

t.q. $\boxed{\|F - g\| < \varepsilon}$ ...

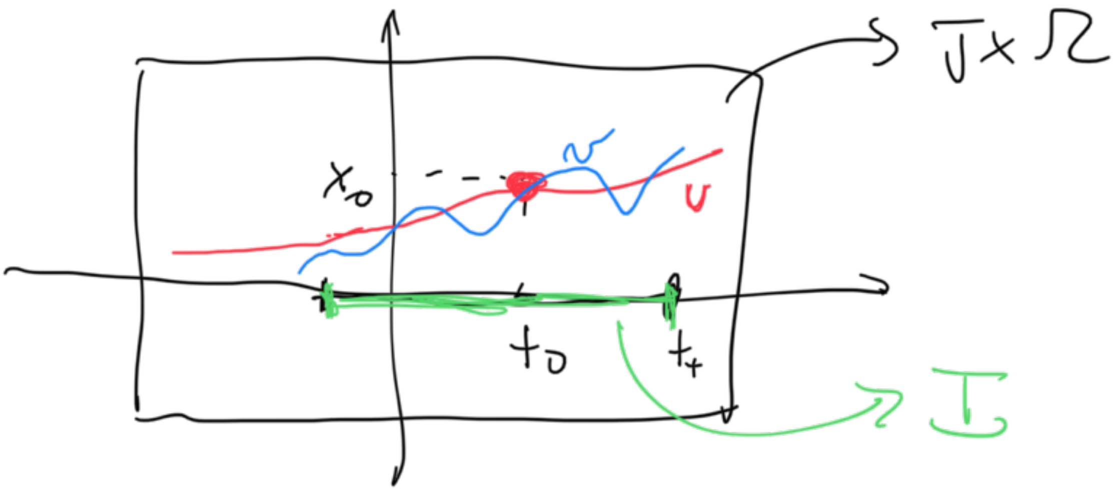
t.q. $\boxed{\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon}$. Supposons qu'il existe un intervalle $I \subset J$ t.q. les solutions u, v des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sont définies sur I.

Alors

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon |t_+ - t_0| e^{L|t-t_0|}$$



preuve : stratégie lemme de Gronwall :

$$\|u(t) - v(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, u(s)) - g(s, v(s)))\, ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, v(s)) + f(s, v(s)) - g(s, v(s)) \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{t_0}^{t} \underbrace{(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))}_{\downarrow \text{ loc. Lipschitz}} ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, v(s)) - g(s, v(s)) \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0} L \| u(s) - v(s) \| ds \right| + \varepsilon |t - t_0|$$

pour $t > t_0$ $\quad I = [t_0, t_+]$

$$\leq \underbrace{\varepsilon (t_+ - t_0)}_{c_0} + \underset{\tilde{c}}{L} \int_{t_0}^{t} \| u(s) - v(s) \| ds$$

lemme de Gronwall : $\quad t > t_0$

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \varepsilon | t_+ - t_0 | e^{C(t - t_0)}$$

∎