cours 13 examen 24/06 3 heures

3.4 Forme des solutions

$$(*) \quad X'(t) = AX(t) \qquad X(0) = X_0$$

$$X(t) = e^{tA} X_0$$

$$= e^{tS} e^{tN} X_0$$

nilpotente.

S diagonalisable sur $\mathbb{C}$

N nilpotente

<u>Théorème</u> Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Les solutions de l'équation $(*)$ sont

$$X(t) = \sum_{1 \leq i \leq r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k v_{i,k} \right)$$

où $v_{i,k} \in \Gamma_i = \ker(X - \lambda_i)^{p_i}$

avec $m_i = \max_{1 \leq k \leq e_i} \dim J_{i,k}$

<u>Théorème</u> Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les solutions de l'équation $(*)$ sont

$$X(t) = \sum_{1 \leq i \leq q} e^{t\alpha_i} \left(\sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k \left(\cos \beta_i t \, a_{i,k} + \sin \beta_i t \, b_{i,k} \right) \right)$$

où $\alpha_i = \mathrm{Re}(\lambda_i)$

$\beta_i = \mathrm{Im}(\lambda_i)$

$\beta_i = \mathrm{Im}(\lambda_i)$

et $\quad a_{i,k}\ , b_{i,k} \in E_i = (\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}) \cap \mathbb{R}^n$.

preuve : $\quad X(t) = e^{At} X_0$ $\quad \blacksquare$

Remarque : La condition initiale peut être décomposée dans les espaces propres généralisés Γ_i.

$$X(0) = X_0 = v_1 + \dots + v_r \in \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$$

maintenant $\quad \boxed{v_{i,k} = \frac{1}{k!} N^k v_i}$

$$X(t) = e^{tS} e^{tN} (v_1 + \dots + v_r)$$

$$e^{tN} = I + tN + \dots + \frac{t^k N^k}{k!} + \dots$$

Exemples. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ $\qquad X' = AX$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

vecteurs propres

$\lambda = 3 \qquad$ i) $\quad A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

espace propre $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = -1 \qquad$ ii) $\quad A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

esp. propre $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de passage

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{tA} = P\, e^{t\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On calcule :

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} P) = A(e^{tA} P)$$

$\Rightarrow W = e^{tA} P$ est une matrice Wronskienne

$\det W \neq 0$.

$$\| $$

$$P e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

base des solutions

de l'équation $X' = AX$:

$$x(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$$

$$y(t) = \alpha e^{3t} - \beta e^{-t}$$

Exemples : systèmes linéaires de dimension 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$X'(t) = A X(t)$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$
$$= \lambda^2 - \operatorname{Tr} A \, \lambda + \det A$$

discriminant :

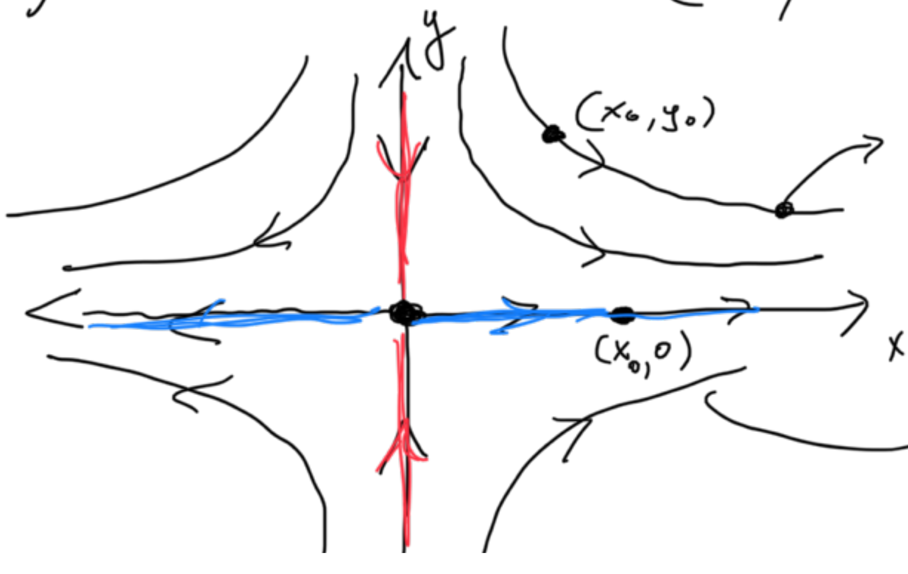
$$\Delta = (\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A$$
$$= (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc$$

cas I : $\boxed{\Delta > 0}$ (deux valeurs propres réelles distinctes)

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \lambda > \mu$$

On suppose que A est diagonale : $\boxed{\Delta > 0}$

1) $\det A < 0$ $\quad (\mu < 0 < \lambda)$



$$e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad t > 0$$

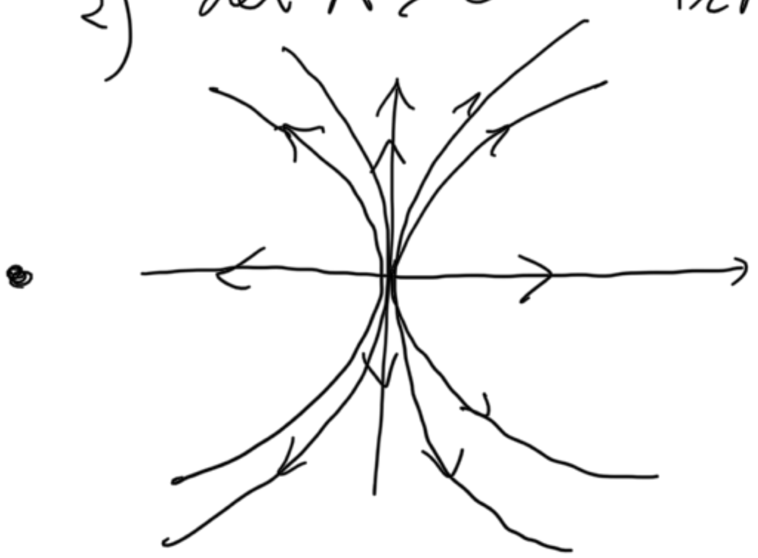
$X(0) = (x_0, 0)$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} x_0 \\ e^{t\mu} 0 \end{pmatrix}$$

l'origine est un point d'équilibre

<u>point selle</u>

2) $\det A > 0 \quad \operatorname{Tr} A > 0 \quad (\lambda > \mu > 0)$



$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$|x(t)| = C\,|y(t)|^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

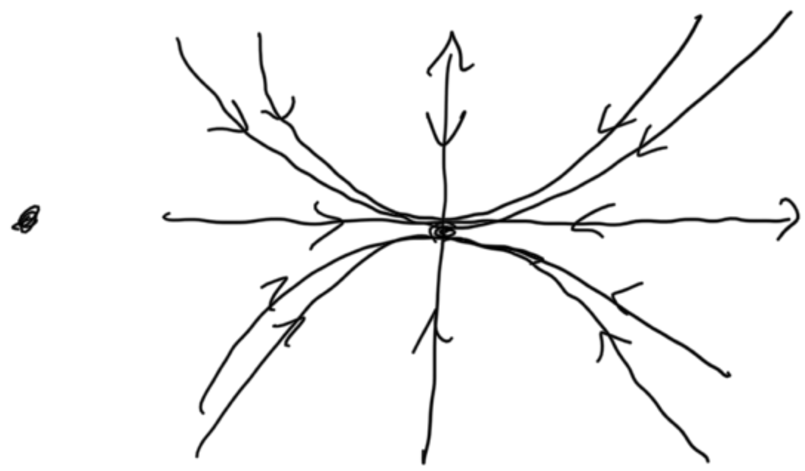
car $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} x_0 \\ e^{\mu t} y_0 \end{pmatrix}$

<u>noeud instable</u>

$$\left| \frac{x(t)}{x_0} \right|^{\mu} = \left| \frac{y(t)}{y_0} \right|^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad |x(t)| = C\,|y(t)|^{\lambda/\mu}$$

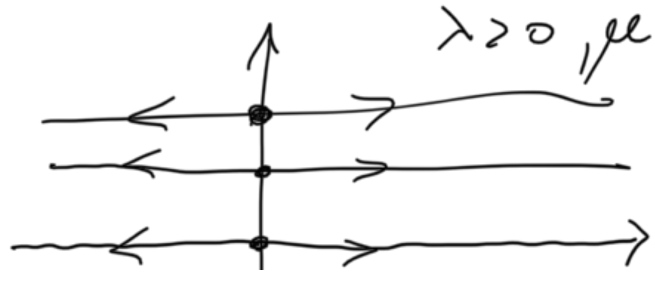
3) $\det A > 0 \quad \operatorname{Tr} A < 0 \quad (\mu < \lambda < 0)$



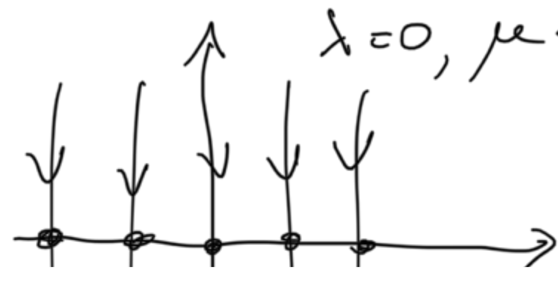
noeud stable

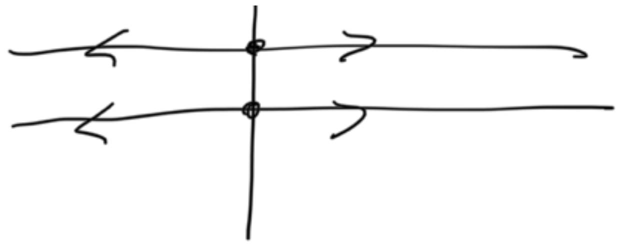
4) $\det A = 0$

$\lambda > 0, \mu = 0$



$\lambda = 0, \mu < 0$



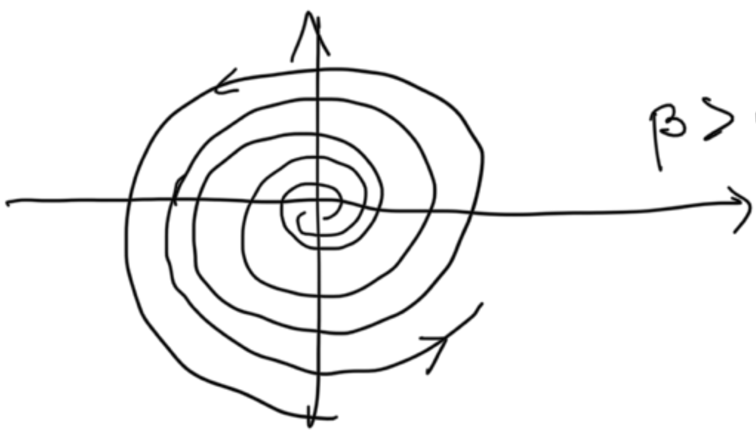


cas II $\quad \Delta < 0 \quad$ racines complexes $\alpha \pm i\beta$

Quitte à conjuguer par une matrice de passage on peut supposer que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

1) $\operatorname{Tr} A > 0 \quad (\alpha > 0)$

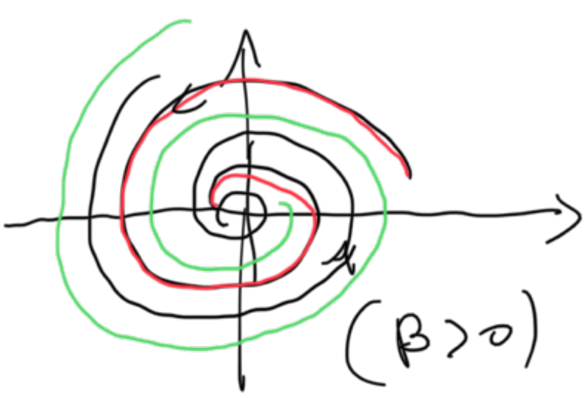


$\beta > 0$

$$X(t) = e^{t\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}} X_0 = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix} X_0$$

foyer instable

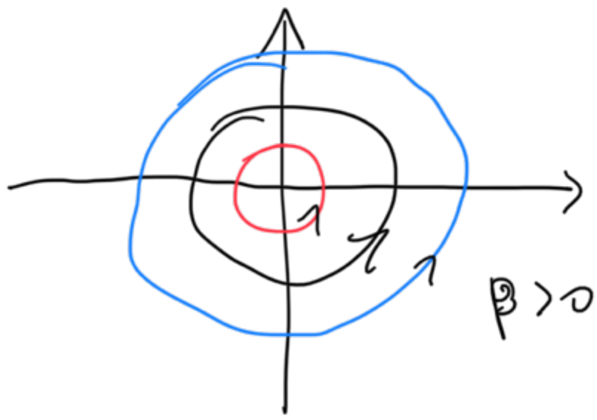
2) $\operatorname{Tr} A < 0 \quad (\alpha < 0)$



foyer stable

$(\beta > 0)$

3) $\operatorname{Tr} A = 0 \quad (\alpha = 0)$

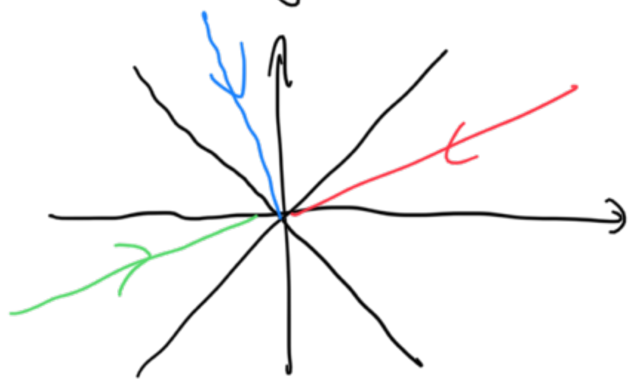


centre

Cas III $\Delta = 0$

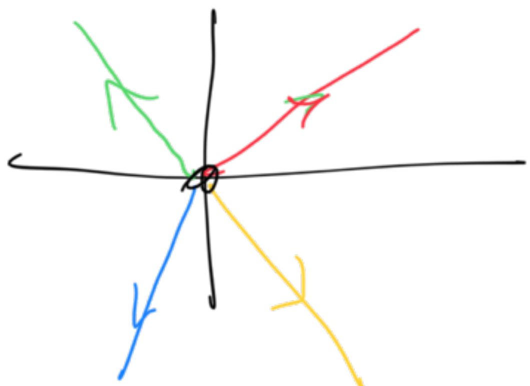
i) A diagonalisable $\Rightarrow A = \lambda \, Id$

1)



$\lambda < 0$
noeud stable

2)



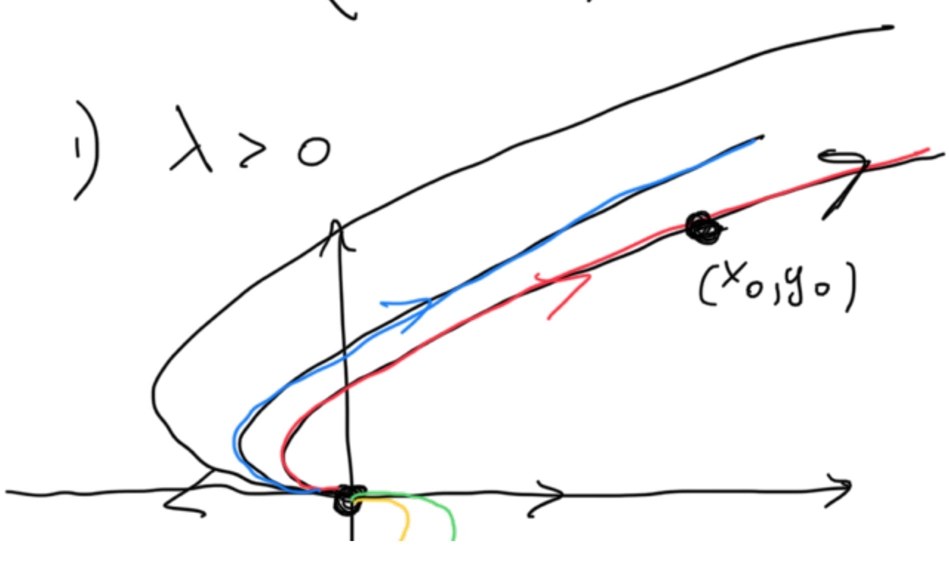
$\lambda > 0$
noeud instable

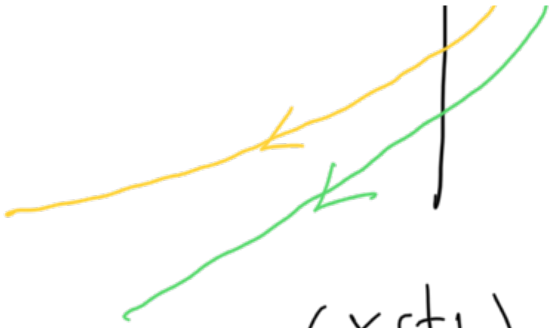
ii) A non-diagonalisable

On suppose que A est dans forme canonique de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1) $\lambda > 0$





noeud dégénéré instable

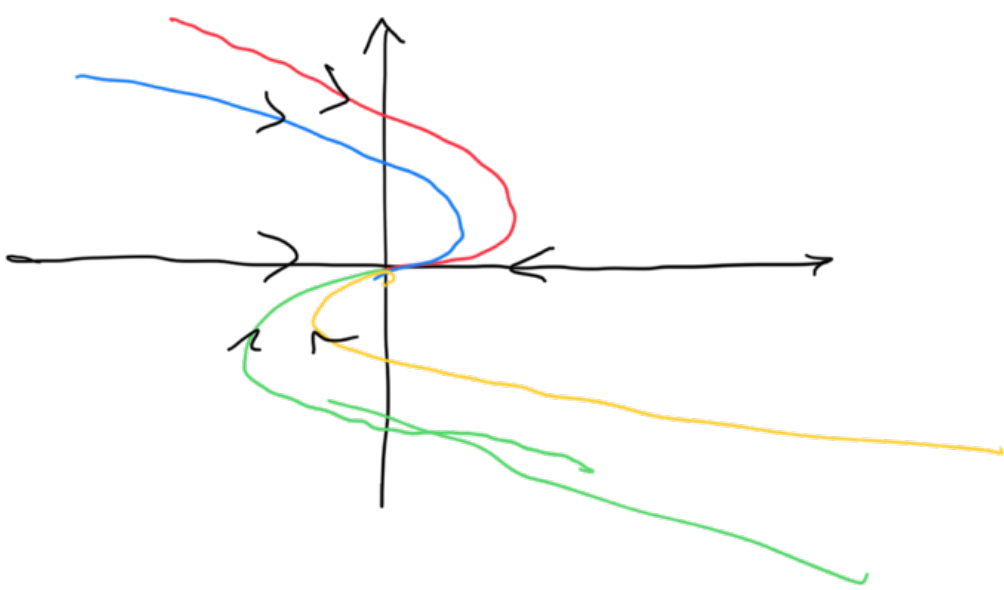
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{t\lambda}\left(I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 e^{t\lambda} + y_0 t e^{t\lambda} \\ y_0 e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

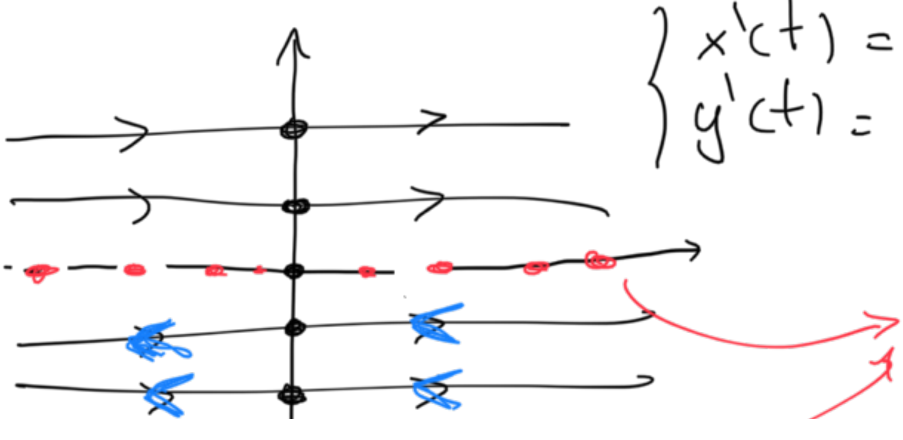
$$\begin{cases} x(t) = e^{t\lambda}(x_0 + t y_0) \\ y(t) = e^{t\lambda} y_0 \end{cases}$$

2) $\lambda < 0$ noeud dégénéré stable

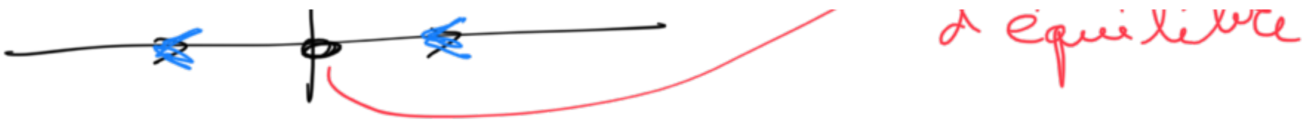


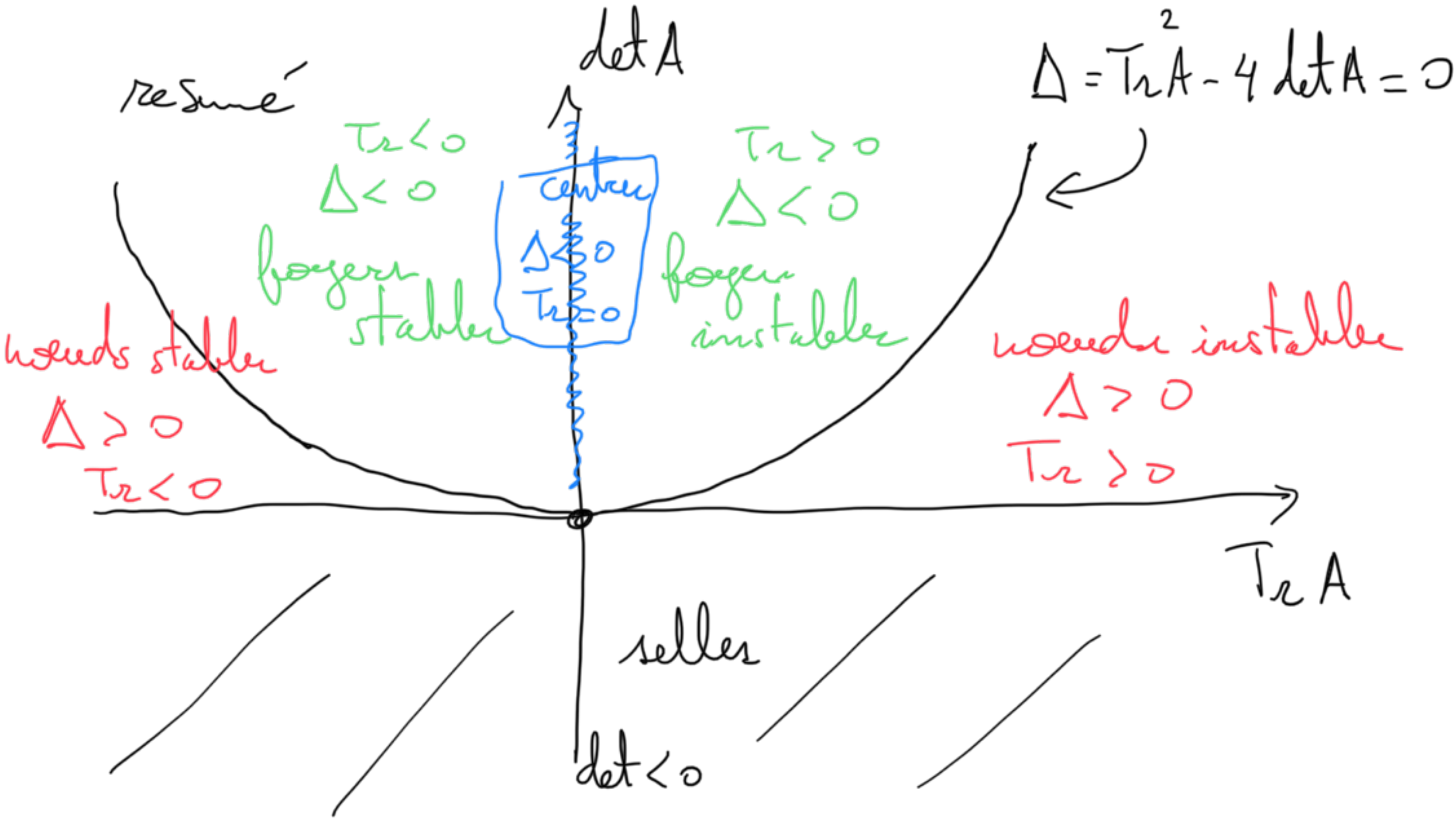
3) $\lambda = 0$ $(\mathrm{Tr}\, A = 0)$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$



points





3.4.1 Comportement asymptotique

Le comportement asymptotique dépend des signes des parties réelles des valeurs propres.

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad A \in M_n(\mathbb{R})$$

- $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

$\Rightarrow$ La projection de la solution $x(t)$ dans l'espace E_i tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ quand t tend vers $-\infty$.

$E_i = (\Gamma_i \oplus \overline{\Gamma}_i) \cap \mathbb{R}^n$ où

$\Gamma_i = \ker(A - \lambda_i I)^{p_i}$

$$\boxed{x(t) = \sum_{1\le i\le q} e^{t\underset{\mathrm{Re}(\lambda_i)}{\alpha_i}} \Big(\sum_{1\le k\le m_i-1} t^k \big(\cos(\beta_i t)\, a_{i,k} + \sin(\beta_i t)\, b_{i,k}\big)\Big)}$$

- $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

$\Rightarrow$ La projection de la solution $x(t)$ dans l'espace E_i tend vers ∞ quand t tend vers $+\infty$ et vers 0 quand $t \to -\infty$.

- $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$

La projection sur la composante E_i croît de façon polynomiale.

Remarque : Si $\dim \Pi_i = p_i = \dim \ker(A-\lambda_i I)^{p_i}$

↳ espace propre associé à λ_i $= \ker(A-\lambda_i I)$

il n'y a pas des termes polynomiaux $\Rightarrow$ la solution est bornée

Définition :

$$E^{s} = \Big(\bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda_i)<0} \Pi_i\Big) \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda_i)<0} E_i$$

espace stable (stable)

espace stable (stable)

$$E^{u} = \Big(\bigoplus_{Re(\lambda_i)>0} \Gamma_i\Big) \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{Re(\lambda_i)>0} E_i$$

espace instable (unstable)

$$E^{c} = \Big(\bigoplus_{Re(\lambda_i)=0} \Gamma_i\Big) \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{Re(\lambda_i)=0} E_i$$

espace centre

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u .$$

Remarque : • Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit analoguement $\Gamma^s = \bigoplus_{Re(\lambda_i)<0} \Gamma_i$, $\Gamma^u = \bigoplus_{Re\lambda_i>0} \Gamma_i$

$$\Gamma^c = \bigoplus_{Re\lambda_i=0} \Gamma_i .$$

• Comme chaque Γ_i ou E_i sont invariant par A, Γ_i et E_i sont aussi invariants par e^{tA}

Théorème : Soit A (réelle ou complexe) et $X'(t) = A\,X(t)$.

• E^s (ou Γ^s) est l'ensemble de $x(0) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) t.q.

$\lim \; \|x(t)\| \ldots$

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$$

- E^u (ou Γ^u) est l'ensemble de $x(0) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) t.q.

$$\lim_{t \to -\infty} \|x(t)\| = 0$$

- E^c (ou Γ^c) est l'ensemble de $x(0) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) t.q. $\exists M \geq 0$ et $C > 0$ t.q. pour $|t|$ suffisement grand

$$\frac{1}{C}\|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq C|t|^M \|x(0)\|$$

(si $\dim \Pi_i = p_i$ alors $M = 0$).
la solution est bornée.

Remarque : si $\alpha > 0$ t.q.

$$\alpha < \min_{\mathrm{Re}(\lambda_i) \neq 0} |\mathrm{Re}(\lambda_i)|$$

Alors il existe $c > 0$ t.q.

- si $x(0) \in E^s$ (ou Γ^s)

$$\forall t > 0 \quad \|x(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x(0)\| \; (\to 0)$$

$$\|x(-t)\| \geq \frac{1}{C} e^{\alpha t} \|x(0)\| \; (\to +\infty)$$

- si $x(0) \in E^u$ (ou Γ^s)

$$\forall t > 0 \quad \|x(t)\| \geq \frac{1}{C} e^{\alpha t} \|x(0)\| \; (\to +\infty)$$

$$\| x(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x(0)\| \ (\to 0)$$

Proposition: Soit $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes

1) Il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formé de vecteurs propres de A
2) $\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_r$ avec $\Pi_i := \ker(A - \lambda_i I)$
3) multiplicité géométrique = multiplicité algébrique
4) $\forall i \quad \Pi_i' = \Pi_i$
5) ~~Dans~~ Dans la forme réduite de Jordan
$$J_{i,k} = (\lambda_i) \in M_1(\mathbb{C})$$

Fait: Les matrices complexes avec valeurs propres distinctes forment un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.

Remarque: L'espace ~~des~~ matrices diagonalisables contient un ouvert dense.

• L'espace de matrices diagonalisable n'est pas un ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{n} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

est une suite de matrices non-diagonalisables

Preuve du Fait:

densité : On utilise la forme canonique de Jordan

bloc de Jordan
$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} \lambda_i+\varepsilon_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i+\varepsilon_{m_i} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_i}$ distinct

ouvert : supposons une suite $A_n \longrightarrow A$

A des valeurs propres distincts mais A_n avec deux valeurs propres communs.

$$A_n x_n = \lambda_n x_n$$
$$A_n y_n = \lambda_n y_n$$

par compacité (on considère des vecteurs propres de norme 1) on obtient deux suites convergente
$$\begin{matrix} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix}\text{distincts} \\ \text{si on} \\ \text{choisit} \\ \langle x_n, y_n\rangle = 0\end{matrix}\right)$$

t.q.
$$A_n x_n \longrightarrow Ax = \lambda x \longleftarrow \lambda_n x_n$$
$$A_n y_n \longrightarrow Ay = \lambda y \longleftarrow \lambda_n y_n$$

contradiction. ∎

On dit que l'espace des matrices diagonalisables est $\boxed{\text{générique}}$: <u>il contient un ouvert dense de l'espace de matrices.</u>

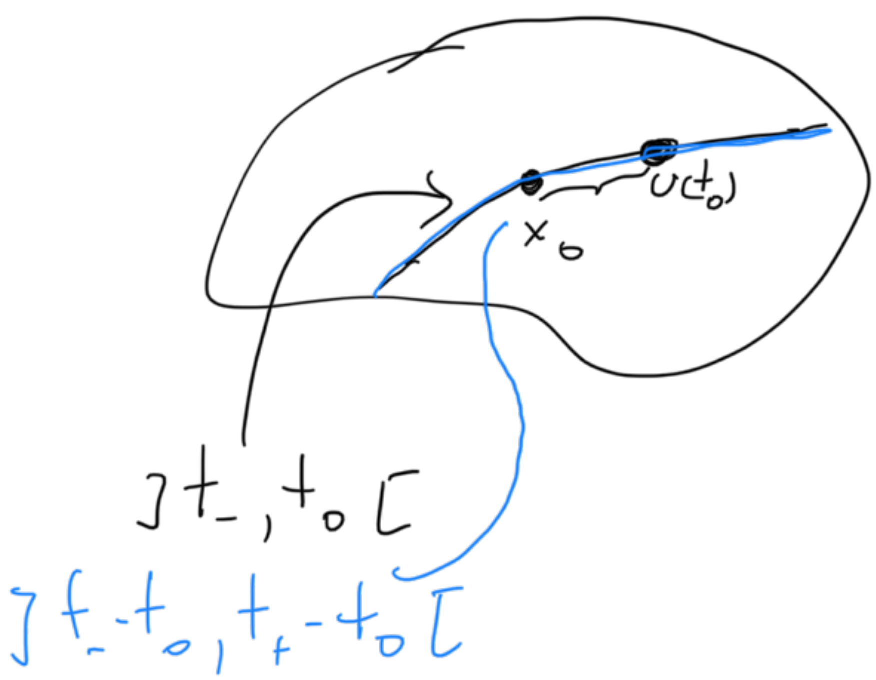
Chapitre 4 : Stabilité des équilibres.

4.1 Flots et portraits de phase : cas autonome.

$x'(t) = F(x(t))$ F ne dépend pas de t

$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

Proposition : Soit $u :]t_-, t_+[\longrightarrow \Omega$ une solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = F(x(t))$ $x(0) = x_0$ alors $\bar{u} :]t_- - t_0, t_+ - t_0[\longrightarrow \Omega$ définie par $\bar{u}(t) = u(t+t_0)$ est une solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = F(x(t))$ $x(0) = u(t_0)$



$$\begin{cases} u :]t_-, t_+[\to \Omega \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u} :]t_- - t_0, t_+ - t_0[\to \Omega \\ \bar{u}(0) = u(t_0) \end{cases}$$

preuve : il faut montrer que $\bar{u}$ satisfait les condition initiale et est solution de l'équation.

- $\bar{v}'(t) = v'(t+t_0) = F(v(t+t_0)) = F(\bar{v}(t))$
- $\bar{v}(0) = v(0+t_0) = v(t_0)$

Définition : Soit

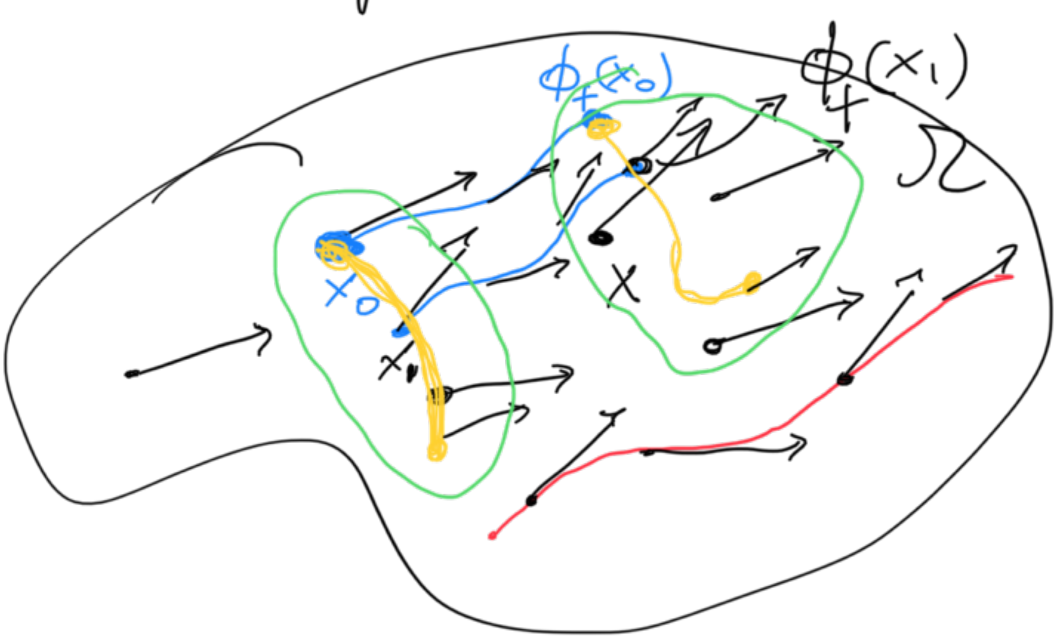
$$(t,x) \longrightarrow \phi_t(x)$$

l'application définie pour $x \in \Omega$ et $t \in I_x$ (intervalle maximale du problème de Cauchy) t.q.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x) = F(\phi_t(x)) \\ \boxed{\phi(0,x) = x} \end{cases}$$

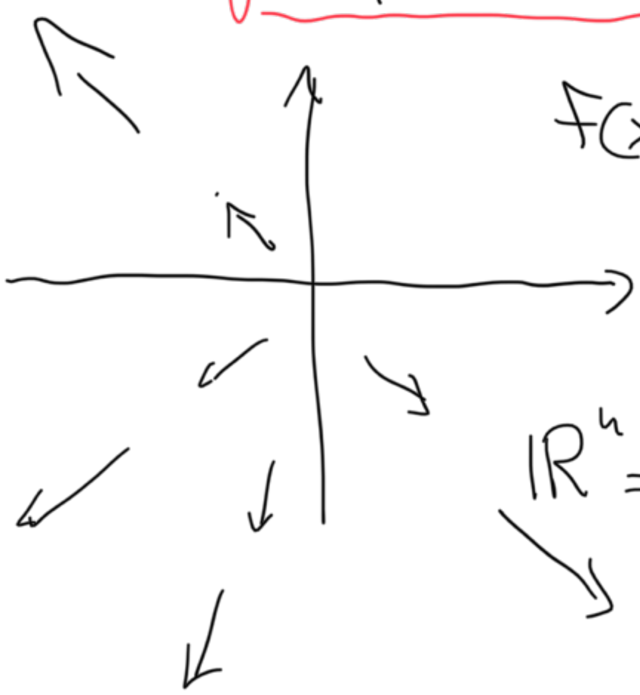
$\phi_t(x)$ est le flot de l'équation $X'(t) = F(X(t))$

Remarque : On peut interpréter le flot comme des courbes intégrales d'un champs de vecteurs sur Ω.



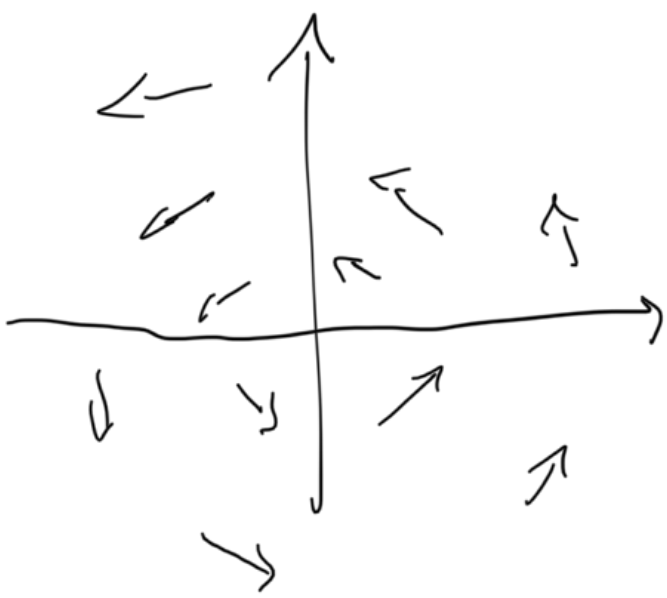
Exemple : $\dot{x}(t) = A\,x(t)$

$$\boxed{\phi_t(x) = e^{tA} x}$$



$f(x) = Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n = \Omega$



$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

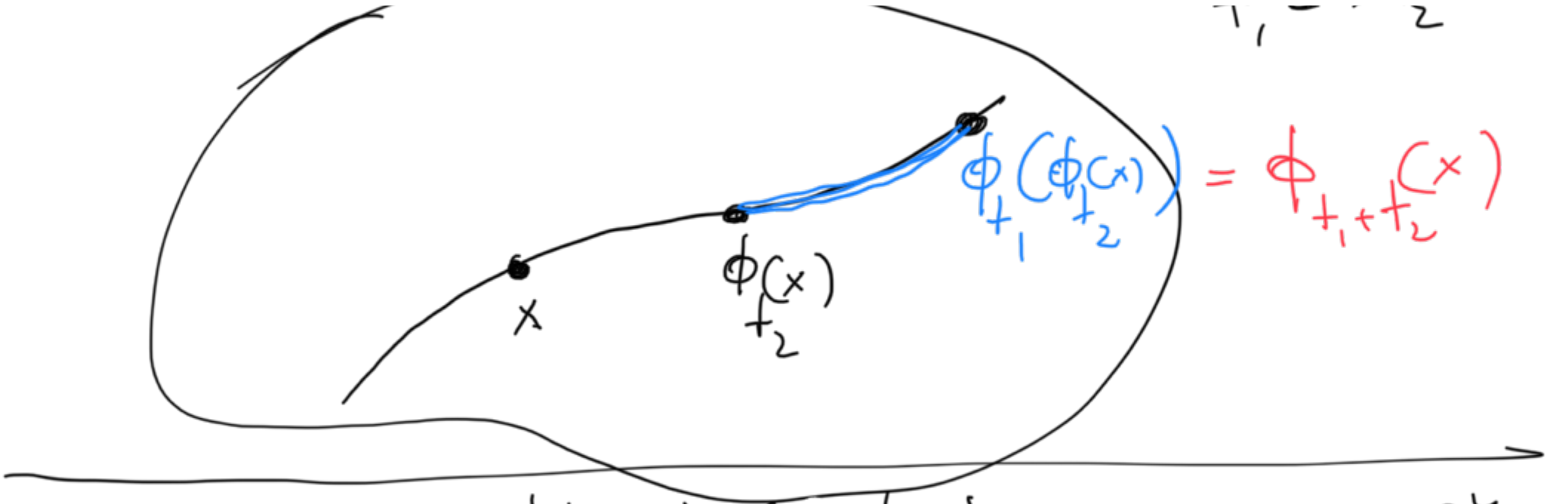
Remarque : Si $\phi_t(x) = e^{tA} x$.

$$\phi_{(t_1+t_2)}(x) = e^{(t_1+t_2)A} x = e^{t_1 A} \underbrace{e^{t_2 A} x}_{\phi_{t_2}(x)}$$

$$= e^{t_1 A} \phi_{t_2}(x)$$

$$\boxed{\phi_{(t_1+t_2)}(x) = \phi_{t_1}(\phi_{t_2}(x))}$$

$t \mapsto t_1$



$x'(t) = f(x(t))$ $\qquad f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Proposition (Formule du flot) Si $t_1 \in I_x$ et $t_2 \in I_{\phi_{t_1}(x)}$ alors $t_1 + t_2 \in I_x$

et $\phi_{t_1+t_2}(x) = \phi_{t_2}(\phi_{t_1}(x))$.

preuve : On vérifie que les deux expressions satisfont le même problème de Cauchy

(1) $\phi'_{t+t_1}(x) = f(\phi_{t+t_1}(x))$ –

et $\phi_{0+t_1}(x) = \phi_{t_1}(x)$.

(2) $\phi'_t(\phi_{t_1}(x)) = f(\phi_t(\phi_{t_1}(x)))$ –

et $\phi(\phi_1(x)) = \phi_1(x)$.