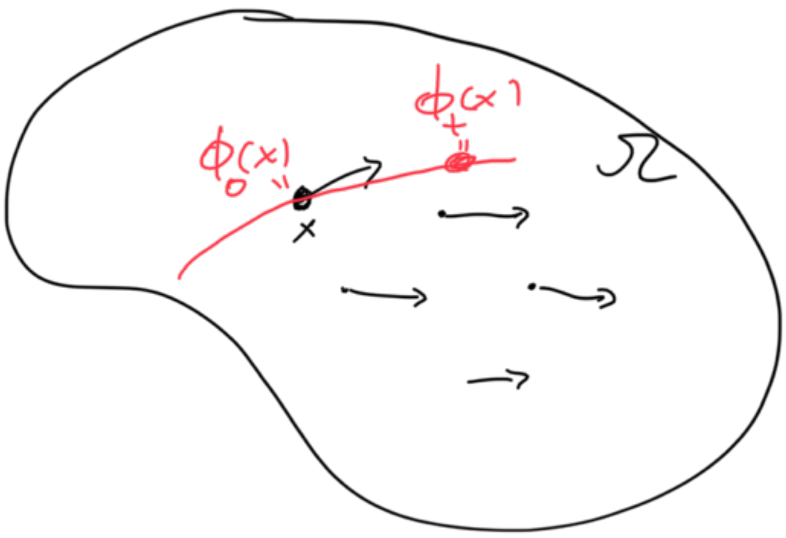
Cours 14

Rappel : $x' = F(x)$ eq. diff. autonôme

$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (champ de vecteurs)



$\phi_t(x) = \phi(t, x)$ flot du champ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_t(x)}{\partial t} = F(\phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \end{cases}$$

Formule du flot si $t_1 \in I_x$ et $t_2 \in I_{\phi_{t_1}(x)}$

alors $\phi_{t_1+t_2}(x) = \phi_{t_2}(\phi_{t_1}(x))$.

$\mathcal{D} = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in I_x \}$.

$\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \Omega$

ϕ satisfait

1) $\phi_0(x) = x \quad \forall x \in \Omega$

2) $\partial \phi(t, x) = F(\phi(t, x))$

2) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) = f(\Phi(t,x))$

3) $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x) \quad \forall t,s \in \mathbb{R}$

si $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$.

4.1.1 Orbites et portraits de phase

Définition Une orbite d'un point $x_0 \in \Omega$ est l'ensemble

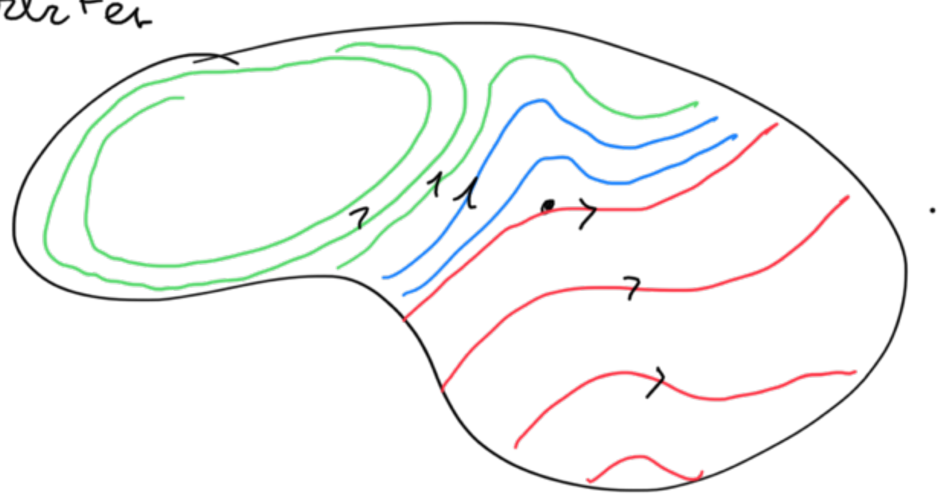
$$\mathcal{O}_{x_0} = \{ \phi_t(x_0) \mid t \in I_{x_0} \}$$

Remarque : • si $x \in \mathcal{O}_{x_0}$ alors $\mathcal{O}_{x_0} = \mathcal{O}_x$

(car si $x = \phi_t(x_0)$ alors $\phi_{-t}(x) = \phi_{-t} \circ \phi_t(x_0) = x_0$)

• les orbites ne s'intersectent pas.

donc Ω est une union disjointe d'orbites

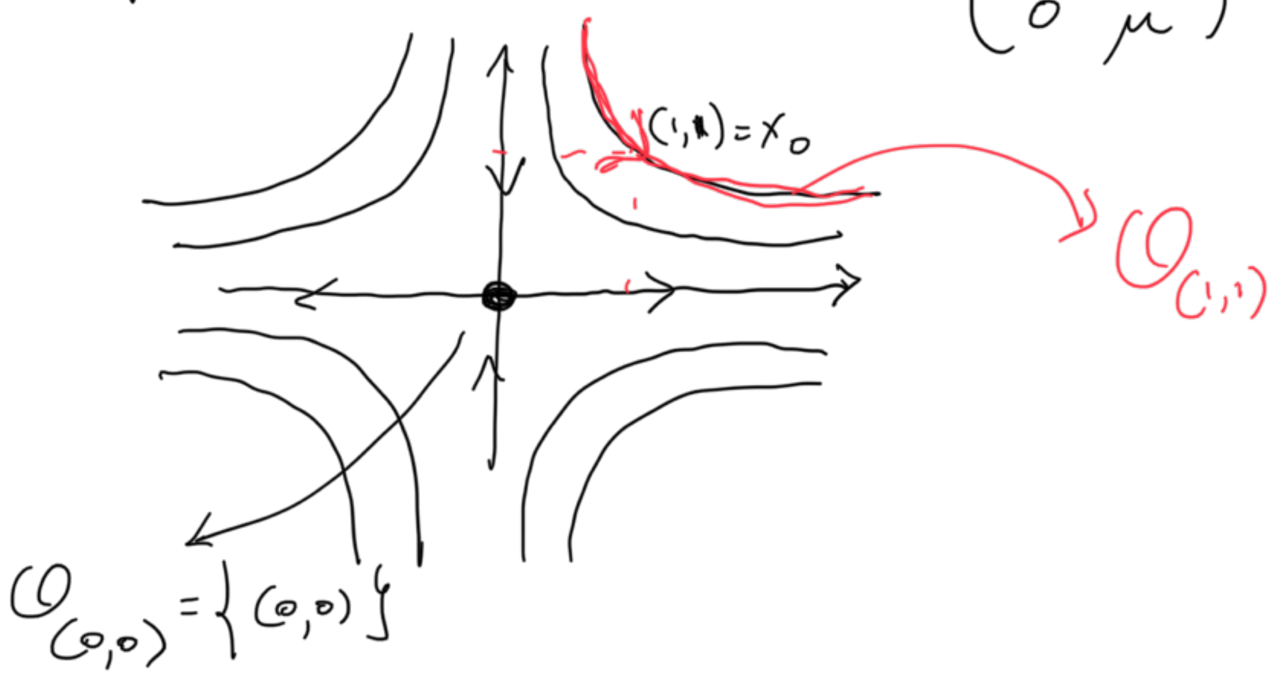


Définition : La partition de Ω en orbites est dite le portrait de phase des champs de vecteurs.

On indique aussi le sens de parcours

de chaque orbite

Exemple $\quad X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \lambda > 0 > \mu$



Définition • si $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$ on dit que x_0 est un point d'équilibre.

Dans ce cas $\quad \phi_t(x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x_0) = \boxed{0 = f(x_0)}$$

$\Big($ si $f(x_0) = 0$ alors $I_{x_0} = \mathbb{R}$ et $\forall t \quad \phi_t(x_0) = x_0 \Big)$

• $\mathcal{O}_{x_0}$ est dite une orbite périodique

si $\exists T > 0$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\phi_{t+T}(x_0) = \phi_t(x_0)$

• $\mathcal{O}_x$ est une orbite ouverte

si $\forall t, s \in I_x$, $t \neq s$ $\quad \phi_t(x) \neq \phi_s(x)$.

• Un champ de vecteurs est

dit complet si $\forall x \in \Omega \quad I_x = \mathbb{R}$

i.e. $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$

i.e. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$

• Un ensemble $A \subset \Omega$ est invariant (positivement invariant) par le flot ϕ_t si $\forall t \; (t \geq 0)$ $\forall x \, A \quad \phi_t(x) \in A$.

Exemples : 1) L'orbite $\mathcal{O}_x$ est un ensemble invariant.

2)

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0 \}$ est invariant

Définition Une intégrale première de $x' = F(x)$ est une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$ (de classe C^1) constante le long des orbites :

$\forall x \in \Omega \quad \forall t \in I_x \quad \frac{d}{dt} h(\phi_t(x)) = 0$

$\forall x \in \Omega \quad \forall t \in I_x \qquad \frac{d}{dt} h(\phi_t(x)) = 0$

Remarque : ① $\frac{d h}{dt}(\phi_t(x)) = D h(\phi_t(x)) . \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x)$

$0 = D h(\phi_t(x)) F(\phi_t(x))$

② L'hypersurface

$H_c = \{ x \in \Omega \mid h(x) = c \}$

$\hookrightarrow$ constante

est invariante par le flot.

4.2 Linéarisation et perturbation du flot

On montrera que $\phi(t, x)$ est de classe C^1.

$\uparrow \uparrow$

Théorème : On considère $x' = F(x)$ où $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k $1 \leq k \leq \infty$.

1) $\forall x \in \Omega \quad \exists I_x$ avec une unique solution maximale $\phi(\cdot, x) : I_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$ t.q. $\phi(0, x) = x$

2) $\mathcal{D} = \{ (t, x) \mid x \in \Omega, t \in I_x \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est ouvert et $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k.

3) ϕ satisfait l'équation

$\forall (t,x) \in \mathcal{D}$

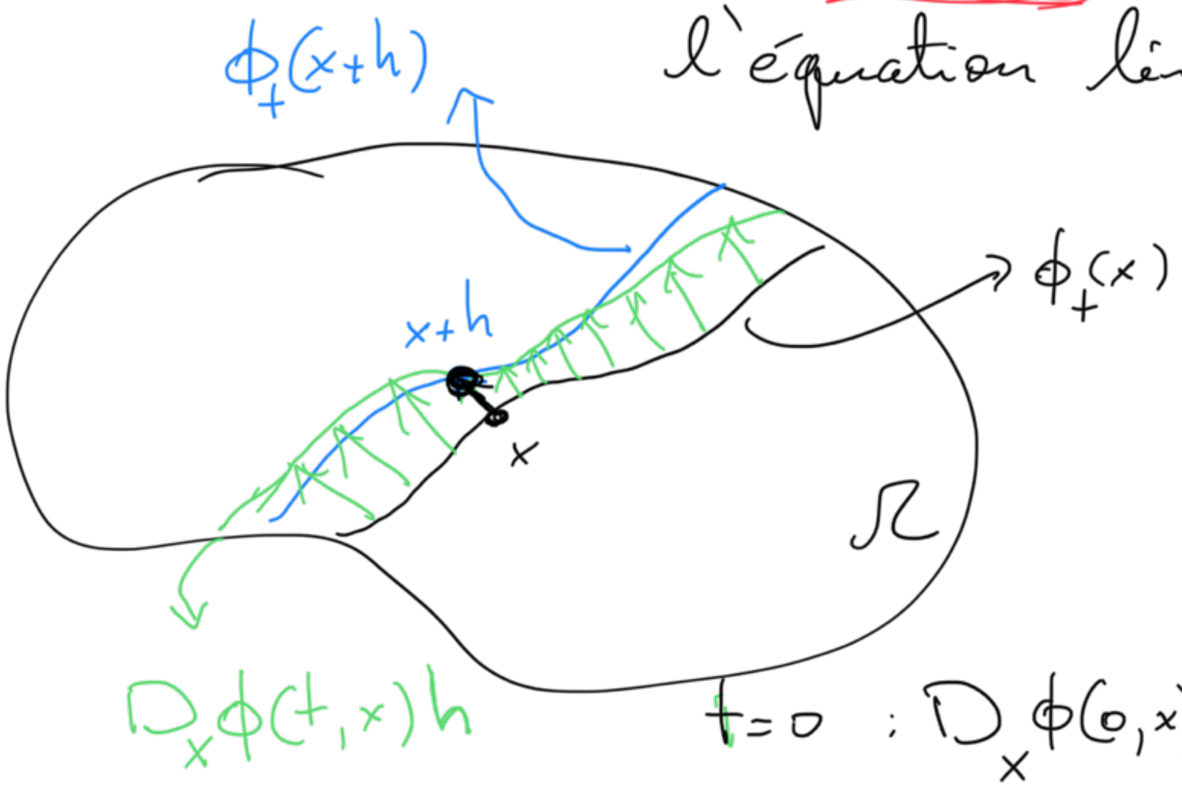
$$\underset{*}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \left(D_x \phi(t,x) \right) = Df(\phi(t,x)) \left(D_x \phi(t,x) \right) \\ D_x \phi(0,x) = \underline{Id} \end{cases}$$

l'équation est ditte linéarisée ou équation variationnelle.

$*$ est une équation linéaire

$$D_x \phi(t,x) = R(t,0)$$

$\hookrightarrow$ <u>résolvante</u> de l'équation linéaire



$t=0$: $D_x \phi(0,x) h = h$

<u>preuve</u> : 1) existence de solutions maximale déjà fait

2) $\mathcal{D}$ est ouvert. Déjà fait.

il manque: montrer que la solution est de classe C^k

On considère un système

$$\begin{cases} X' = F(X) \end{cases} \qquad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$** \quad \left| \; Y' = D_x F(x)\, Y \qquad Y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \right.$$

applications linéaires

conditions initiales

$$\phi(0, x) = x$$

$$\Psi(0, x) = Id$$

Solution $J \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

on montre que $\boxed{D_x \phi(t,x) = \Psi(t,x)}$

ϕ est de classe C^1 et .

- F est de classe C^1

$\Rightarrow D_x F$ est continue

on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz pour le système $(**)$ en utilisant la méthode des approximations successives pour les équations intégrales :

$$\phi_0(t,x) = x \qquad \Psi_0(t,x) = Id$$

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{n+1}(t,x) &= x + \int_{t_0}^{t} F(\phi_n(s,x))\, ds \qquad \boxed{t_0 = 0} \\ \Psi_{n+1}(t,x) &= Id + \int_{t_0}^{t} D_x F(\phi_n(s,x))\, \Psi_n(s,x)\, ds \end{aligned} \right.$$

On a $D_x \phi_0(t,x) = D_x x = Id = \Psi_0(t,x)$

et par récurrence

$$D_x \Phi_{n+1} = \Psi_{n+1}$$

On observe que $\Phi_n(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$

$\Psi_n(t,x) \longrightarrow \Psi(t,x)$

convergent uniformement sur un pavé $I \times B \subset \mathbb{R} \times \Omega$ (vu dans la preuve de Cauchy-Lipschitz).

Rappel: dérivabilité d'une suite des fonctions

- $F_n \in C^1[a,b]$
- $F_n(x_0) \longrightarrow y_0$
- $F_n' \xrightarrow[\text{uniforme}]{} g$ sur $C[a,b]$

$\Rightarrow F_n \longrightarrow F$ sur $C[a,b]$ et $F' = g$.

On conclut en appliquant le rappel que ϕ est dérivable et que

$$D_x \phi(t,x) = \Psi(t,x)$$

Remarque: La même conclusion est valable pour une équation non-autonôme

$$x' = F(t,x) \qquad F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left\{ Y' = D_x F(t,x)\, Y \right.$$ $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

avec condition initiale $x(t_0, x) = x$

$Y(t_0, x) = Id$

Remarque $\underline{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs : $\underline{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

On peut associer un opérateur différentiel

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

si $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(Xv)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$$

On dit que le champ X est de classe C^k si les fonctions $a_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k $\forall i$.

équivalence entre champs de vecteurs par changement de coordonnées :

Soit $\varphi : V \longrightarrow U$ difféomorphisme

$x \longmapsto y$

sur V : $X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$

U : $\boxed{\varphi_* X} = \sum_{i=1}^{n} b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$

définition

$$(\varphi_* X)(u)(y) = \underline{X(u\circ\varphi)(x)} \quad \boxed{x = \varphi^{-1}(y)}$$

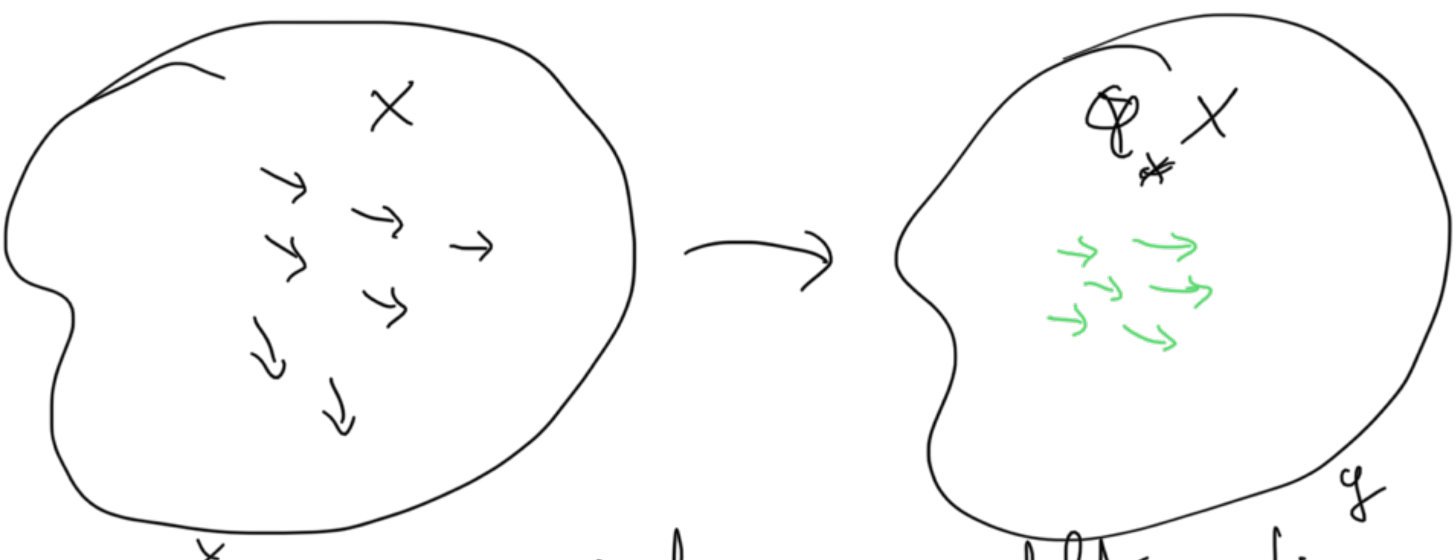
Question : $b_i(y)$ en fonction de $a_i(x)$?

$$\sum_{i,j} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

$$= \sum_j \underbrace{\left(\sum_i a_i(x) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)}_{b_j(y)} \frac{\partial u}{\partial y_j}(y)$$

$$b_j(y) = \sum_i a_i(x) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)$$

$$= \sum_i a_i(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(y))$$



équivalence par difféomorphisme

Application I Redressement de champs de vecteurs réels.

Théorème : Soit X un champ de vecteurs

réel de classe C^1 dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ non nul en x_0.
Il existe des coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ au voisinage de x_0 t.q. $X = \frac{\partial}{\partial y_1}$.

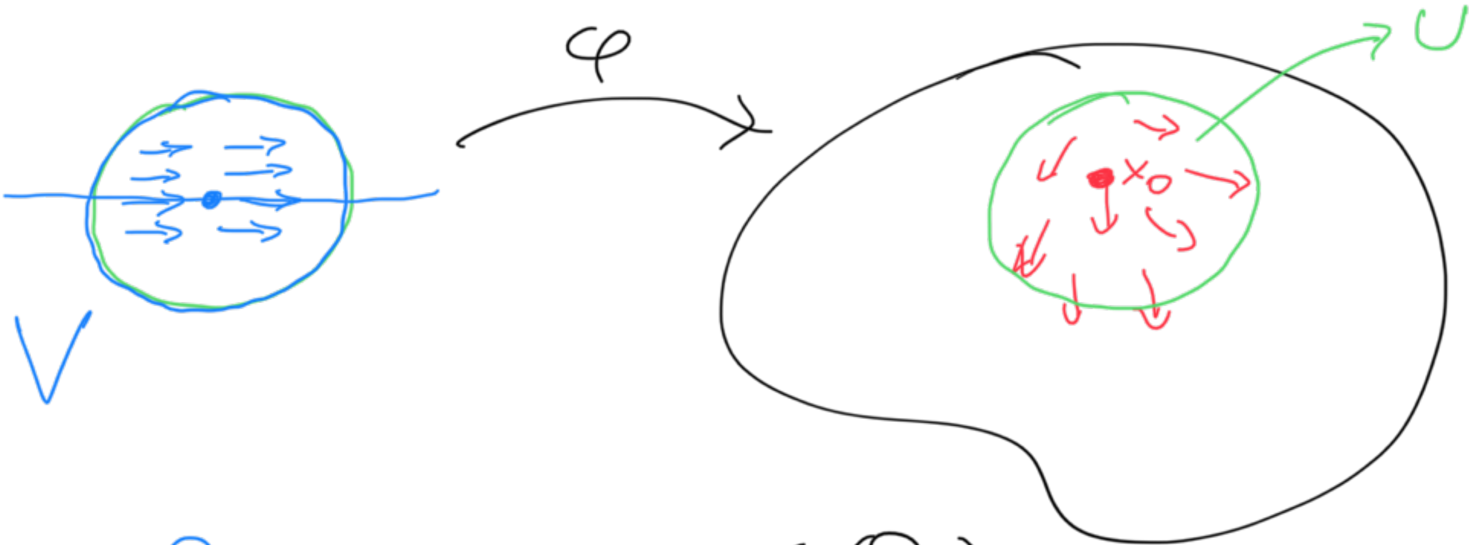
i.e. Il existe un voisinage U de x_0, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme

$$\varphi : \underset{y}{V} \longrightarrow \underset{x}{U} \quad \text{t.q.}$$

$\forall u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

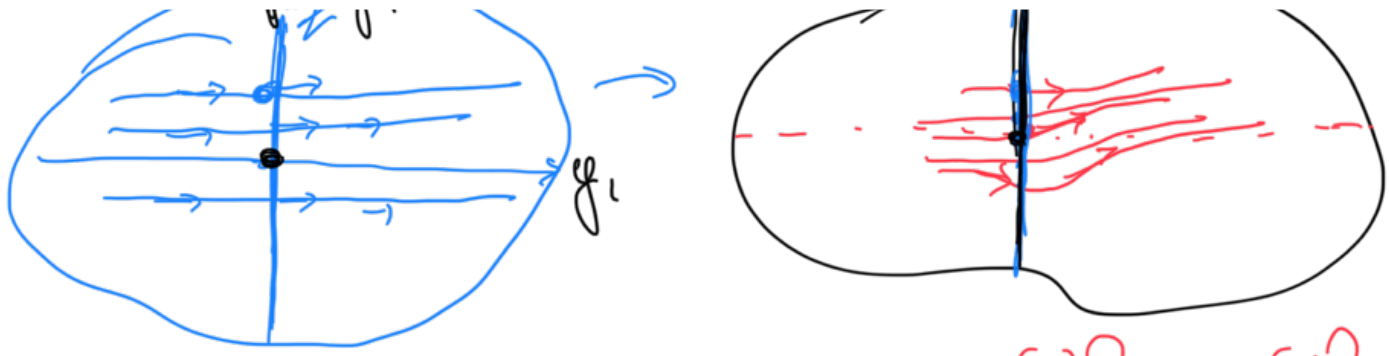
$$X u(x) = \frac{\partial}{\partial y_1}(u \circ \varphi)(y) \quad \varphi(y) = x.$$

$$\left(\text{i.e.} \quad \varphi_* \frac{\partial}{\partial y_1} = X \right)$$



$$\frac{\partial}{\partial y_1} \longrightarrow \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) = X$$

preuve: stratégie: On suppose $a(x_0) \neq 0$



$a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots$

On utilise le flot à partir d'un hyperplan transverse à la direction x_0.
La coordonnée y_1 sera le temps du flot.

Sans perte de généralité on suppose que $x_0 = 0$.
On considère le problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt} z(t) = a(z(t))$$

$$\boxed{z(0) = (0, y_2, \dots, y_n)}$$

$a(z) = (a_1(z), \dots, a_n(z))$

Il existe un voisinage $]-T, T[$ voisinage de 0 et B voisinage de $y = 0$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ t.q.
$z(t) = \varphi(t, y)$ est l'unique solution de l'équation sur $]-T, T[\times \mathbb{R}^{n-1}$
(de classe C^1 par le théorème précédent)

$$(t, y) \xrightarrow{\varphi} x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

On calcule le Jacobien de φ en $(0,0)$ (On montre qu'il est non nul)
$\Rightarrow \varphi$ est difféomorphisme local.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0,0) = \varepsilon_1'(0) = a_1(\varphi(0,0)) = a_1(0,0) \neq 0$$

hypothèse

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}(0,0) = 0 \quad \forall i \geq 2 \quad \text{car } \varphi_1(0,y) = 0 \quad \forall y \in B$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(0,0) = a_k(0,0) \quad k \geq 2$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}(0,0) = \delta_i^k \quad 2 \leq i,k \leq n \quad \text{car}$$

$$\varphi_k(0,k) = y_k.$$

$$\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & 0 & 0 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \end{array} = a_1(0,0) \neq 0$$

Théorème de la fonction inverse

$\Rightarrow \quad \exists V$ et U de 0 en $\mathbb{R}^n$

t.q. $\quad \varphi : V \longrightarrow U$ est un difféomorphisme.

$$\forall (t,y) \in V \quad \frac{\partial}{\partial t} u(\varphi(t,y)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} u(\varphi(t,y)) \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t,y)}_{a_i(t,y)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t,y))$$

$$= (Xu)(x) \qquad x = \varphi(t,y)$$

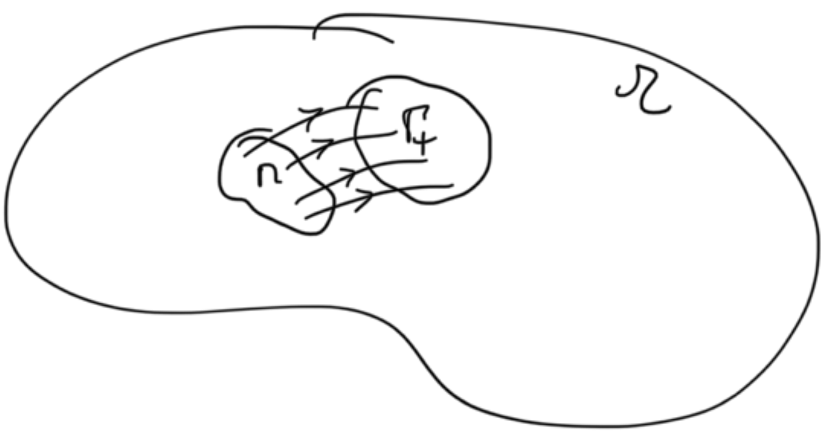
i.e. $\boxed{\varphi_* \frac{\partial}{\partial t} = X}$

Application II On considère $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ champ de vecteurs

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \operatorname{Tr} D_x F$$

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ et

$$\Gamma_t = \{ \phi_t(x) \mid x \in \Gamma \} = \phi_t(\Gamma)$$



$$\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \int_{\phi_t(\Gamma)} d\mu \underset{\text{changement de variable}}{=} \int_{\Gamma} |\det D_x \phi_t(x)| \, dx$$

Rappel $D_x \phi_t(x)$ est la resolvante de l'équation linéarisée

Par le théorème de Liouville pour les équations linéaires $\operatorname{Tr} D_x F(x) = 0$

$$\Rightarrow \det D_x \phi_t(x) = 1$$

On conclut que $\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \int_\Gamma dx = \operatorname{vol}(\Gamma)$

$\Rightarrow$ (champs de divergence nulle $\Rightarrow$ $\operatorname{vol}(\Gamma_t)$ est constant)

4.3 Equilibre et stabilité

$x' = F(x)$ equation autonome avec $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Définition: $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point d'équilibre si $x(t) = x_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ est une solution.

Rappel: $F(x_0) = 0 \iff \mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\} \iff \phi_t(x_0) = x_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Définition: Un point d'équilibre x_0 est stable si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q.

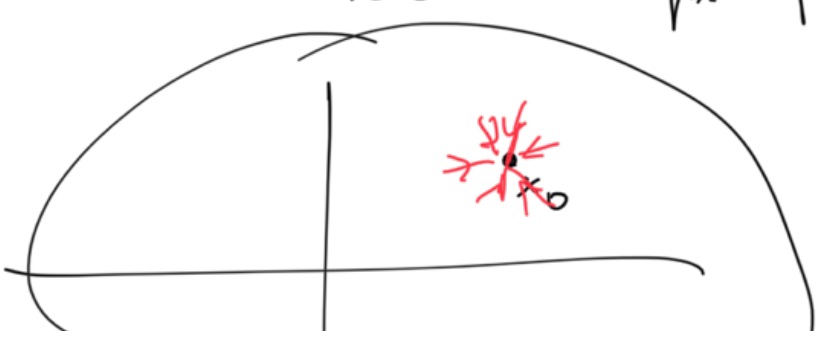
$\|x - x_0\| < \delta$ et $t > 0$ alors

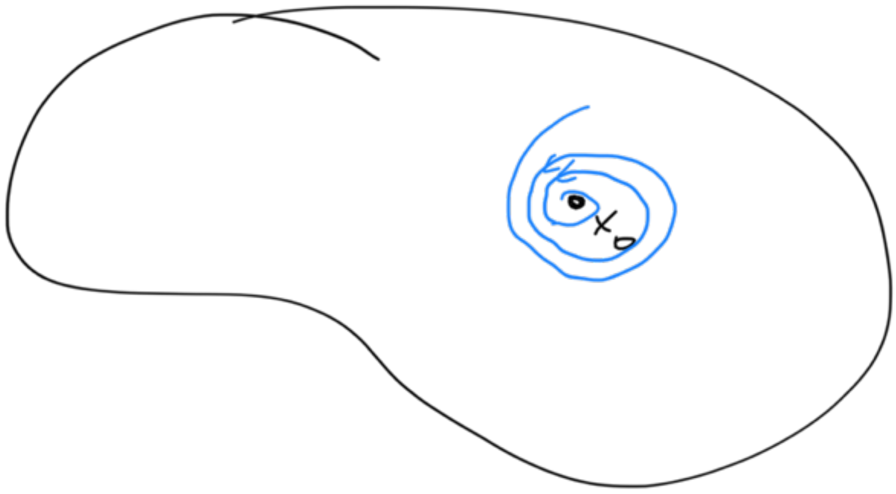
$$\|\phi_t(x) - x_0\| < \varepsilon$$

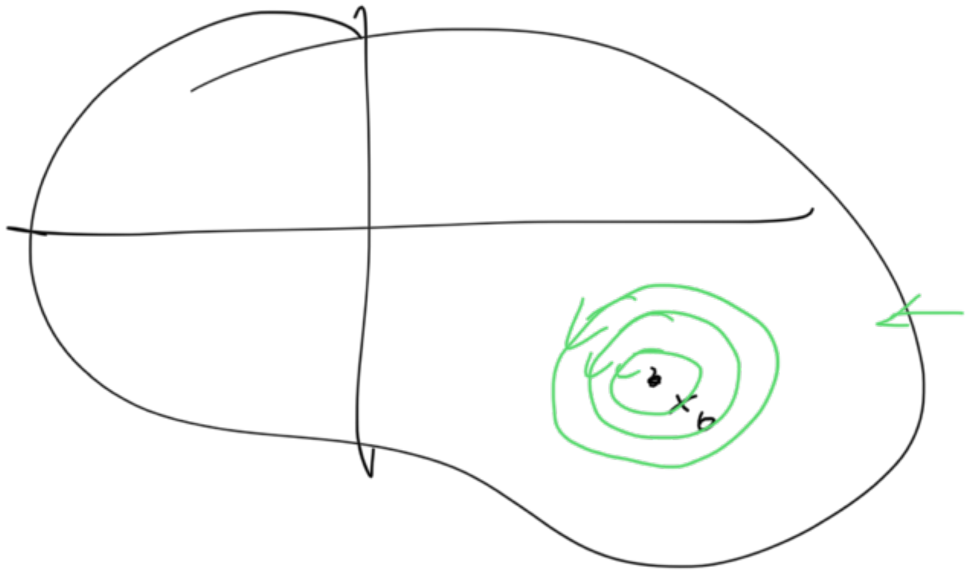
Remarque: si $x \in B(x_0, \delta)$ (boule de rayon δ autour de x_0) alors

$$\phi_t(x) \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow I_x \supset [0, +\infty[$$

(solutions bornées sont définies pour tout temps positifs).







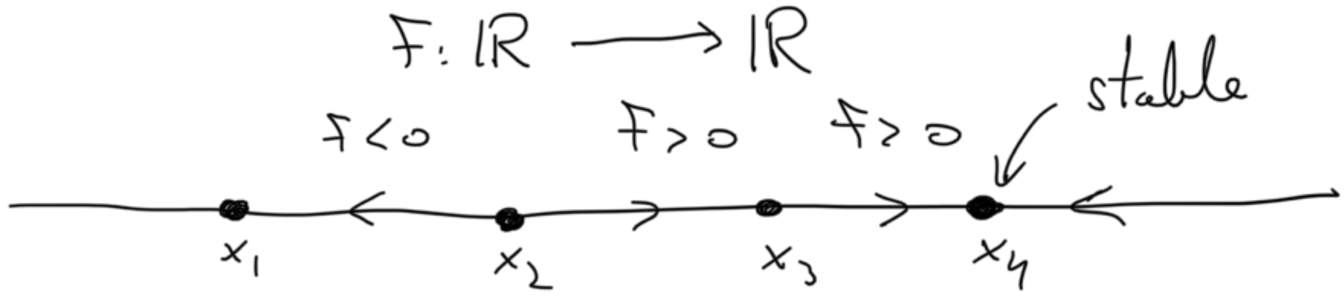
Définition : Un point d'équilibre x_0 est localement asymptotiquement stable s'il existe un voisinage V de x_0 t.q

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = x_0 \quad \forall x \in V.$$

Si $V = \Omega$ on dit que x_0 est globalement asymptotiquement stable.

Exemple: En dimension 1

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$x_i \in F^{-1}(0)$ points stables de

$\lambda_i \in S(0)$ points stables de

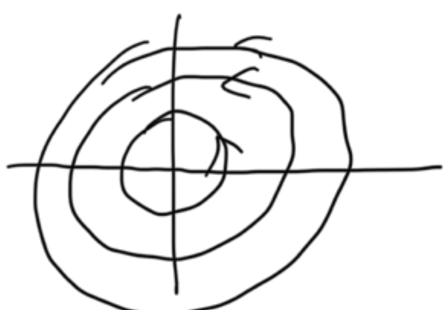
l'équation $x' = F(x)$

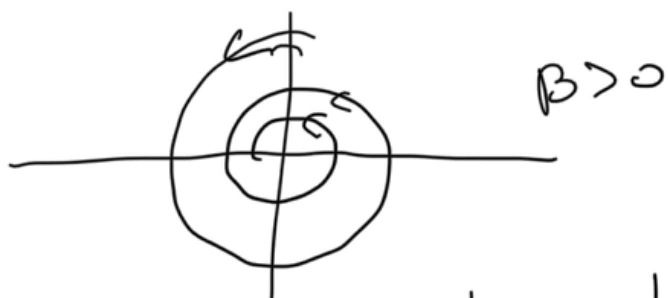
4.3.1 Le cas linéaire.

$$X' = AX$$

Proposition : L'origine est un point d'équilibre <u>asymptotiquement stable</u> si et seulement si toute valeur propre de A sont de partie réelle strictement négative ($E^s = \mathbb{R}^n$)

Remarque : Si A a des valeurs propres de partie réelle 0 l'équilibre peut être stable ou instable (i.e. non stable).

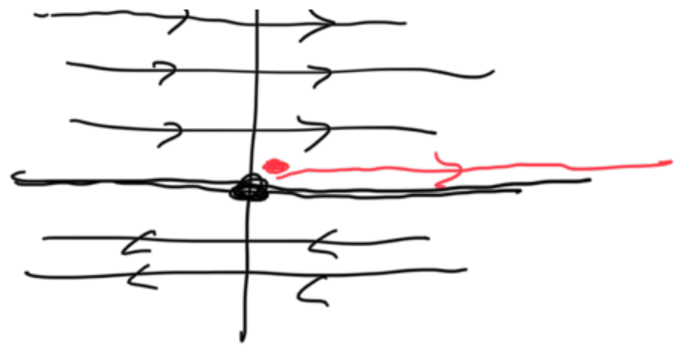




$$A = \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \qquad A = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

stable $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ — asymptotiquement stable

$\lambda = \alpha + i\beta$ — $\mathrm{Re}\,\lambda = \alpha < 0$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non stable

$\lambda = 0$

Proposition : L'origine est stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont de parties réelles ≤ 0 et si, pour les valeurs propres de partie réelle nulle, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique

Remarque : si les multiplicités ne coincident pas on a des solutions polynômiales en t.

Remarque : Pour les équations affines

$$X' = Ax + b$$

$$F(x) = Ax + b$$

$$F(x) = 0 \iff Ax = -b$$

si $\quad Ax_0 = -b \quad$ on écrit

$$X' = A(x - x_0)$$

$$\iff (X - x_0)' = A(x - x_0)$$

La nature du point d'équilibre x_0 est la même que pour l'origine